

Ilyen sorozat létezik. Igaz ugyanis, hogy minden 4-nél nagyobb négyzetszám „belefoglalható egy pitagoraszi szám-hármasba”, azaz ha $m^2 > 4$, akkor van olyan pozitív négyzetszám, amelyet m^2 -hez adva ismét négyzetszámot kapunk. A fenti eredmény ismételt alkalmazásával nyilván tetszőleges, 4-nél nagyobb négyzetszámból kiindulva megfelelő sorozathoz jutunk.

Azt kell tehát igazolnunk, hogy $m > 2$ esetén az

$$(1) \quad m^2 + x^2 = y^2$$

egyenletnek létezik olyan megoldása, ahol $x > 0$. Rendezés és szorzattá alakítás után (1)-ből az $m^2 = (y - x)(y + x)$ egyenletet kapjuk. Ha m^2 -et fel tudjuk bontani egyező paritású különböző tényezők $m_1 \cdot m_2$ szorzatára ($m_1 < m_2$), akkor az

$$y - x = m_1,$$

$$y + x = m_2$$

egyenletrendszer megoldható a pozitív egészek körében.

Ha m páratlan, akkor $m_1 = 1$, $m_2 = m^2$ megfelel és ekkor az $x = \frac{m^2 - 1}{2}$, $y = \frac{m^2 + 1}{2}$ megoldást kapjuk, ha pedig m páros, akkor $m_1 = 2$ és $m_2 = \frac{m^2}{2}$ -ből $x = \frac{m^2 - 4}{4}$, $y = \frac{m^2 + 4}{4}$.

Ezzel a felhasznált segédítelt igazoltuk, és így a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A megoldás során a kérdéses sorozatnak csak a létezését igazoltuk. Látható, hogy végtelen sok megfelelő sorozat van, sőt egy-egy ilyen sorozat még az első elem megadása után sem egyértelmű, hiszen a segédítetbeli m^2 általában többféleképpen is felbontható megfelelő tényezők szorzatára.

A megoldásból egyébként rekurzió is kiolvasható ilyen sorozatok elkészítésére. Ha $m_1 = a_1^2 > 4$ az első elem, és az első k darab elem összegét Q_k jelöli, akkor egy megfelelő sorozat $(k + 1)$ -edik eleme az alábbiak szerint számolható: $m_{k+1} = a_{k+1}^2$, ahol

$$a_{k+1} = \begin{cases} \frac{Q_k - 1}{2}, & \text{ha } Q_k \text{ páratlan,} \\ \frac{Q_k - 4}{4}, & \text{ha } Q_k \text{ páros.} \end{cases}$$