

A metszetsokszög csúcsait nyilván a metsző síknak és a gúla éleinek a metszéspontjaiként kapjuk. Jelölje S a gúla alaplapjának a síkját, T pedig a metsző síkot. Ha S és T párhuzamos, akkor T csak a gúla A csúcsából induló $n - 1$ élt metszheti, az ilyen metszetsokszögnek tehát legfeljebb $n - 1$ oldala lehet.

Ha S és T metszik egymást, akkor jelölje e a közös egyenesüket. Osszuk a gúla S -re illeszkedő $n - 1$ csúcsát három csoportba aszerint, hogy az e egyenes melyik partján helyezkednek el. Jelölje k_1 az e -re illeszkedő, k_2 és k_3 pedig a két különböző félsíkban lévő csúcsok számát. Ekkor nyilván $k_1 + k_2 + k_3 = n - 1$.

A metszetsokszög csúcsait a T síknak a gúla alaplapjának kerületével, illetve az $n - 1$ darab oldaléllal való metszéspontjaiként kapjuk. Külön-külön adunk becslést az egyes típusú metszéspontok számára.

A T sík, azaz az e egyenes úgy metszheti a gúla alaplapjának kerületét, ha egy megfelelő oldal az e különböző partjára eső csúcsokat köt össze, vagy pedig valamelyik végpontja az e -re illeszkedik. Mivel pedig az e által meghatározott két félsík bármelyikéből legfeljebb annyi él léphet ki, mint az ide eső csúcsok számának a kétszerese, ezért T az alaplap kerületét legfeljebb $k_1 + 2 \cdot \min(k_2, k_3)$ pontban metszheti. ($\min(x, y)$ az x és y valós számok közül a nem nagyobbikat, $\max(x, y)$ pedig a nem kisebbiket jelöli.) Ez meg is valósítható, amennyiben a kevesebb/nem több csúcsot tartalmazó félsík nem tartalmaz teljes oldalt, azaz minden itteni csúcs az e másik partjára eső csúccsal van összekötve (1. ábra).

1987-11-392-1.eps

1. ábra

A gúlának az S -re nem illeszkedő A csúcsából induló $n - 1$ darab oldalélét a T sík az alaplapon létrejövő metszéspontok számától függetlenül 1, k_2 vagy pedig k_3 pontban metszheti aszerint, hogy az A csúcs hogyan helyezkedik el a metsző síkhoz képest: illeszkedik rá, vagy pedig a T sík elválasztja a k_2 , illetve a k_3 elemű ponthalmaztól.

A T sík tehát legfeljebb $k_1 + 2 \cdot \min(k_2, k_3) + \max(1, k_2, k_3) = k_1 + k_2 + k_3 + \min(k_2, k_3) = n - 1 + \min(k_2, k_3)$ pontban metszheti a gúla éleit, hiszen $\min(k_2, k_3) + \max(1, k_2, k_3) = k_2 + k_3$. Mivel $\min(k_2, k_3) \leq \frac{k_2 + k_3}{2} \leq \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$,

ezért a metszetsokszögnek legfeljebb $n - 1 + \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$ csúcsa lehet.

Könnyű belátni, hogy ez a maximum minden szóba jövő, azaz 3-nál nagyobb n érték mellett elérhető, tehát ha $n \geq 4$, akkor van olyan n -csúcsú gúla, amelyet egy alkalmas T sík éppen egy $n - 1 + \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$ csúcsú sokszögben metsz.

1987-11-393-1.eps

2.a ábra

1987-11-393-2.eps

2.b ábra

Tekintsünk ugyanis a gúla alaplapjaként egy $n - 1$ oldalú sokszöget és egy azt metsző e egyenest az n paritásától függően a 2.a), illetve a 2.b) ábra szerint. Itt $k_1 = 0$, és ha n páratlan, akkor $k_2 = k_3 = \frac{n - 1}{2}$, ha pedig n páros, akkor

$k_2 = \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$ és $k_3 = \left\lceil \frac{n - 1}{2} \right\rceil$. Az alaplapon így mindkét esetben $2k_2$ metszéspont keletkezik.

Ha például T merőleges az alaplap síkjára, és a gúla n -edik csúcsa abban a feltérben van, amelyik nem több, illetve kevesebb csúcsát tartalmazza az alaplapnak, akkor az oldaléleken k_3 metszéspont jön létre. (A 2. ábrákon A' jelöli az A csúcs merőleges vetületét az alaplapon.)

A metszetsokszög oldalainak a száma így $2k_2 + k_3$, ami páratlan n -re $2 \frac{n - 1}{2} + \frac{n - 1}{2} = (n - 1) + \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$, páros n -re pedig $\left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2} \right) = \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor + (n - 1)$, tehát a kapott maximum valóban elérhető.

Megjegyzések. 1. Bizonyos esetekben a metszetsokszög nem összefüggő, ez azonban nem befolyásolja a csúcsok, illetve élek maximális számára tett megállapításunkat.

2. Ha a gúla konvex, akkor a metsző sík minden lapot legfeljebb egyszer metszhet, tehát a metszetsokszög legfeljebb n oldalú. Ez be is következik, ha T az A csúcsból induló $n - 1$ él közül pontosan egyet nem metsz, ekkor ugyanis két szomszédos alapélen keletkezik metszéspont. Az $n = 5$ esetben ez látható a 3. ábrán.

A megoldással próbálkozók nagyobb része csak ezzel az egyszerűbb esettel foglalkozott.