

I. megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b, c , az oldalakhoz tartozó magasságok pedig m_a, m_b, m_c . Ekkor a háromszög területét az ismert módon felírva

$$\frac{1}{2} = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2},$$

ahonnan

$$1 = \sqrt{am_a} = \sqrt{bm_b} = \sqrt{cm_c},$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$1 = \sqrt{am_a} \leq \frac{a + m_a}{2},$$

$$1 = \sqrt{bm_b} \leq \frac{b + m_b}{2},$$

$$1 = \sqrt{cm_c} \leq \frac{c + m_c}{2}.$$

Ezeket összeadva és rendezve

$$(1) \quad 6 \leq (a + b + c) + (m_a + m_b + m_c)$$

adódik.

Mivel egy háromszög magassága nem lehet hosszabb a vele közös csúcsból induló oldalak egyikénél sem, ezért $a \geq m_b, b \geq m_c, c \geq m_a$, azaz:

$$(2) \quad a + b + c \geq m_a + m_b + m_c.$$

Ekkor viszont (1) csak úgy teljesülhet, ha $a + b + c \geq 3$, ami pedig éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b, c , a terület felét pedig jelöljük s -sel. Ekkor Héron tételéből

$$(3) \quad \frac{1}{2} = T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$(4) \quad (s-a)(s-b)(s-c) \leq \left[\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \right]^3 = \left(\frac{s}{3} \right)^3.$$

Ezt egybevetve (3)-mal:

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{s \cdot \left(\frac{s}{3} \right)^3} = \frac{s^2}{\sqrt{27}}, \quad \text{vagyis:} \quad \frac{\sqrt{27}}{2} \leq s^2,$$

és ez azt jelenti, hogy

$$2s \geq \sqrt{6\sqrt{3}} \approx 3,2237.$$

Az eredeti állításnál tehát több is igaz: *Egy 1/2 területű háromszög kerülete legalább $\sqrt{6\sqrt{3}}$.*

Megjegyzések. 1. Az I. megoldásban szereplő (2) egyenlőtlenségben sohasem áll fenn egyenlőség, ezért az ott leírt módszerrel nem lehet bebizonyítani, hogy a terület legalább $\sqrt{6\sqrt{3}}$.

2. A (4) egyenlőtlenségben $a = b = c$ esetén egyenlőség van, ezért a II. megoldás során kapott eredményünk tovább már nem javítható. Az 1/2 területű szabályos háromszög kerülete éppen $\sqrt{6\sqrt{3}}$.

3. A II. megoldásból az az ismert állítás is kiolvasható, hogy *adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb.*