

I. megoldás. A szorzatok összege *nem függ* az eljárás során végrehajtott felosztások sorozatától. Esetünkben mindig 500 500 az eredmény, általában, n kavics esetén pedig $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

A sejtés megfogalmazása után kézenfekvő a teljes indukciós bizonyítás, csak arra kell ügyelnünk, hogy a szóban forgó összeget egyetlen kavicsra is értelmezzük, mégpedig $\binom{1}{2} = 0$ alakban. Ez megfelel annak, hogy egy olyan kupac, amelyben csak egy kavics van, nem osztható tovább, így ilyenkor a szorzatösszeg 0.

Legyen most $n > 1$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden olyan m -re, amelyre $1 \leq m < n$. Bontsuk az n kavicsból álló kupacot az első lépésben egy k és egy $n - k$ elemű csoportra. ($0 < k < n$, de $k = 1$ lehetséges!) Az n darab kavicsra kiszámolt szorzatösszeg ekkor egyenlő az ebből az első felosztásból nyert szorzatnak, $k(n - k)$ -nak és a k , illetve $n - k$ elemű csoportokhoz tartozó szorzatösszegeknek az összegével. Utóbbi kettő az indukciós feltevés szerint a további felosztásoktól függetlenül $\binom{k}{2}$, illetve $\binom{n-k}{2}$, a három mennyiség összege pedig valóban $\binom{n}{2}$ minden $0 < k < n$ esetén.

Beláttuk tehát, hogy az állítás n -re is igaz, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy az eljárás során éppen az n darab kavicsból készíthető párokat számoljuk össze, amelyek száma, mint ismeretes, $\binom{n}{2}$. Valóban a k -adik felosztás után kapott szorzat azoknak a pároknak a száma, amelyek elemei eddig ugyanabban a kupacban voltak és éppen most kerültek különböző kupacokba. Mivel csoportokat nem egyesítünk, ezért minden lépésnél különböző párokat számolunk meg, másfelől így minden párt megkapunk, hiszen az eljárás végén, $n - 1$ lépés után a kupacok egyeleműek, ekkorra tehát minden egyes pár elemei különböző kupacokban vannak.