A jobb oldalon álló szorzat tényezőit rendre A, B, C-vel jelölve nyilván $a=\frac{A+C}{2}$, $b=\frac{A+B}{2}$ és $c=\frac{B+C}{2}$, a bizonyítandó állítás pedig az

$$(A+B)(B+C)(C+A)\geqq 8ABC \tag{2}$$

alakot ölti.

Az új változók összege, $A+B+C=a+b+c$, ami pozitív és mind A-nál, mind B-nél, mind pedig C-nél nagyobb, hiszen a, b és c pozitív számok. Ez azt jelenti, hogy A, B és C közül legalább kettő pozitív. Ha tehát (2) jobb oldalán van nem pozitív tényező, akkor pontosan egy van, így ilyenkor (2) jobb oldala nem pozitív, a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz.

Ha A, B és C mindegyike pozitív, akkor (2)-t alkalmasan rendezve az

$$A(B-C)^2+B(C-A)^2+C(A-B)^2\geqq 0 \tag{3}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami pedig nyilván teljesül. Az is kiolvasható, hogy (3)-ban pontosan akkor van egyenlőség, ha $A=B=C$, azaz a, b és c egyenlők.

Megjegyzések. 1. Abban az esetben, amikor A, B és C pozitív mennyiségek, (2) a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is belátható, ha összeszorozzuk az

$$\frac{1}{2}(A+B)\geqq\sqrt{AB},\quad \frac{1}{2}(B-C)\geqq\sqrt{BC},\quad \frac{1}{2}(C+A)\geqq\sqrt{AC}$$

egyenlőtlenségeket.

2. Pozitív A, B és C esetén geometriai jelentés tulajdonítható az (1) két oldalán álló mennyiségeknek. A feltétel ugyanis azt jelenti, hogy az a, b, c hosszúságú szakaszokból háromszög szerkeszthető, a bizonyítandó állítás pedig a jól ismert

$$T=\frac{abc}{4R}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

összefüggések felhasználásával a

$$4RT\geqq 8(s-a)(s-b)(s-c)=8\frac{T^2}{s}\quad \text{formába írható.}$$

(R a körülírt kör sugara, T a háromszög területe, s pedig a kerület fele.) A $T=\varrho s$ összefüggés felhasználásával rendezés után az

$$R\geqq\frac{2T}{s}=2\varrho$$

egyenlőtlenséget kapjuk (ϱ a beírt kör sugara), ez pedig minden háromszögben igaz, és egyenlőség akkor teljesül, ha a háromszög szabályos, azaz $a=b=c$.