

Legyenek a paralelogramma csúcsai A, B, C és D , az AB és CD oldalpárra merőleges adott egyenes t , a szerkesztendő tükörkép $A'B'C'D'$, végül messék az AB és a CD egyenesek a t egyenest K -ban illetve L -ben (1. ábra). A tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt $AA' = 2AK$, $BB' = 2BK$, $CC' = 2CL$ és $DD' = 2DL$, tehát a tükrözés most adott szakaszok megkétszerezését jelenti. Ezt fogjuk most elvégezni csak vonalzó segítségével, felhasználva, hogy minden esetben adott egy, a megkétszerezendő szakasszal párhuzamos egyenes (a paralelogramma szemközti oldala).

1987-10-304-1.eps

1.a ábra

1987-10-304-2.eps

1.b ábra

Először egy adott GH szakasz felezőpontját szerkesztjük meg. Legyen I és J az e egyenesen két olyan pont, melyekre a $GHIJ$ trapéz nem paralelogramma. A trapéz HI és GJ szárainak metszéspontja legyen P , a GI és HJ átlók metszéspontja pedig O . Azt állítjuk, hogy a PO egyenes felezi a GH szakaszt.

1987-10-304-3.eps

2. ábra

Messe az O -n átmenő, e -vel párhuzamos egyenes a trapéz szárait az R és a Q pontban (2. ábra). Ekkor a JQO és a JGH , valamint az IRO és az IHG háromszögek hasonlóak, mert megfelelő oldalai párhuzamosak. Ezek arányára tehát

$$\frac{QO}{GH} = \frac{JQ}{JG}, \quad \text{illetve} \quad \frac{OR}{GH} = \frac{IR}{IH}.$$

A párhuzamos szelők tétele miatt a fenti egyenlőségek jobb oldalai egyenlők, és így a bal oldalak egyenlőségéből $QO = OR$ következik, vagyis PO a PQR háromszög súlyvonala. A PQR és a PGH háromszögek középpontosan hasonlóak, ezért PO a PGH háromszögben is súlyvonal, és így valóban felezi GH -t.

Ezek után már könnyen megszerkeszthetjük egy adott ST szakasz kétszeresét, ha adott egy ST -vel párhuzamos f egyenes. Vegyünk fel ezen egy UV szakaszt úgy, hogy $UV < ST$ legyen, és szerkesszük meg az UV szakasz F felezőpontját. Ekkor $UF < ST$, tehát létrejön az SU és TF egyenesek X metszéspontja. Azt állítjuk, hogy az XV és az ST egyenesek Y metszéspontja lesz a keresett pont, amelyre tehát $2ST = SY$ (3. ábra).

1987-10-304-4.eps

3. ábra

Valóban, az XSX és az XUV háromszögek középpontosan hasonlóak, és XF súlyvonal az XUV háromszögben, tehát XT súlyvonal az XSX háromszögben.

Az eredeti paralelogramma tükrözése ezután már egyszerű: a fentebb leírt módon rendre megkétszerezünk az AK , BK , CL , DL szakaszokat.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Egyetlen vonalzó segítségével nem lehet adott egyenessel párhuzamos egyenest szerkesztetni, vagyis ha a paralelogramma helyett csak egy szakaszt kellett volna tükröznünk, azt nem tudtuk volna megtenni.

2. A hiányos vagy hibás dolgozatok szerzőinek nagy része párhuzamos élű vonalzókat használt, sőt olyan is akadt, aki derékszögű vonalzóval dolgozott, mondván, hogy ezt a feladat szövege nem zárja ki. A kitűzötthöz hasonló feladatokban „vonalzó” egyetlen élű, beosztás nélküli eszközt jelent, amellyel adott ponton át tetszőleges egyenest, illetve két adott pontot összekötő egyenest rajzolhatunk.

3. A szerkesztés teljes végrehajtásában sokat rövidíthetünk, elvégre a négy tükörképcsúcs előállítását nem független egymástól.

Lehet egy csapásra megfelelni a KA és LC (vagy LD) szakaszt, hiszen AC és AD közül legalább az egyik metszi a tengelyt.

Egy csúcs tükrözése után pedig a rajta átmenő oldalt vagy átlót tükrözve gyorsabban érünk célba.