

I. megoldás. Legyen a két szám $A = \overline{a_9 a_8 \dots a_1 a_0}$ és $B = \overline{b_9 b_8 \dots b_1 b_0}$. Mivel $10 \mid A + B$, ezért $a_0 + b_0 = 0$ vagy $-$ számjegyekről lévén szó $- a_0 + b_0 = 10$. Az első esetben $a_0 = b_0 = 0$, és így az állítás igaz. Megmutatjuk, hogy a második eset nem lehetséges.

Ha ugyanis $a_0 + b_0 = 10$, akkor az 1-es átvitele miatt csak úgy állhat 0 az összegben a tízesek helyén, ha $a_1 + b_1 = 9$. Ekkor viszont a tízesek összeadásakor is 1 a maradék, ahonnan $a_2 + b_2 = 9$, és így rendre kapjuk, hogy $a_i + b_i = 9$, ha $i \geq 1$.

Így a két szám jegyeinek összege $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_9 + b_9) = 10 + 9 \cdot 9$, ami páratlan. Ez viszont nem lehet, hisz a feltétel szerint A és B ugyanazokból a számjegyekből áll, így ebben az összegben minden számjegy páros sokszor fordul elő, maga az összeg tehát páros.

Valóban nem lehetséges tehát $a_0 + b_0 = 10$, így mindkét szám 0-ra végződik. A bizonyítandó állításnál ezért valamivel több igaz. A és B 10-zel is oszthatók.

Megjegyzések. 1. A feladatban adott tulajdonságú 10 jegyű számok léteznek, például $A = 1\,818\,181\,850$, $B = 8\,181\,818\,150$.

2. A fenti bizonyításban kihasználtuk, hogy A és B jegyeinek összege páros. A kapott ellentmondás nem jön létre, ha A és B páratlan sok jegyből áll, pl. $A + B = 10^{11}$. Az alábbi bizonyításból viszont kiderül, hogy a feladat állítása ilyenkor is igaz.

II. megoldás. Az első megoldás jelöléseit használva legyen most $A + B = 10^k$, ekkor A és B legfeljebb k jegyűek. Most is elég az olyan esetekkel foglalkozni, amelyekben $a_0 + b_0 = 10$, és az előző megoldás szerint ilyenkor $a_i + b_i = 9$, ha $i \geq 1$.

Megmutatjuk, hogy $a_0 = b_0$, azaz mindkettő 5-tel egyenlő. Tegyük föl, hogy ez nem igaz, vagyis $a_0 \neq b_0$.

Mivel a két szám ugyanazokból a jegyekből áll, ekkor az egyik számban, pl. a B -ben az 1-esektől különböző helyi értékeken eggyel többször fordul elő az a_0 , mint az A -ban. Ez viszont $a_i + b_i = 9$ ($i \geq 1$) miatt azt jelenti, hogy az a_0 -t 9-re kiegészítő és így a_0 -tól különböző a' számjegy az egyesektől különböző helyi értékeken eggyel többször fordul elő A -ban, mint B -ben (ábra).

A	...	a'	...	a'	...	a_0
B	...	a_0	...	a_0	...	b_0

Ugyanakkor a B -ben az egyesek helyén álló b_0 nem lehet a' -vel egyenlő, hiszen feltevésünk szerint $b_0 + a_0 = 10$. Ekkor pedig A és B mégsem állhatnak ugyanazokból a számjegyekből, a' az A -ban eggyel többször fordul elő, mint a B -ben.

Ezzel beláttuk, hogy $a_0 + b_0 = 10$ esetén nem lehet $a_0 \neq b_0$, vagyis A és B 5-re végződik.

Megjegyzés. Az első megoldásban láttuk, hogy $A + B = 10^{10}$ esetén A és B utolsó számjegye 0. Ekkor viszont $A/10$ -re és $B/10$ -re is teljesülnek a feladat feltételei, így a II. megoldás szerint $A/10$ és $B/10$ utolsó jegye 5, vagyis a feladatban vizsgált A és B számok 50-nel is oszthatók.