

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a feltételekből következik a sokszög szabályossága. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a sokszög oldalai is, szögei is egyenlők.

1987-05-214-1.eps

1. ábra

Legyenek a sokszög csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n$, a beírt kör és az oldalak érintési pontjai rendre $E_1, E_2, \dots, E_n$; a beírt és a körülírt kör sugara r , illetve R , a körök közös középpontja pedig O (1. ábra). Az $A_i A_{i+1}$ egyenes az E_i pontban érinti a sokszög beírt körét, tehát OE_i merőleges $A_i A_{i+1}$ -re ($i = 1, 2, \dots, n$; $A_{n+1} = A_1$). Másrészt $OA_i = R$ és $OE_i = r$ minden i -re, tehát az $OE_i A_i$ és az $OE_i A_{i+1}$ típusú háromszögek mindannyian egybevágók, mert megegyezik két oldaluk, és van egy derékszögük. Ezért a sokszög valamennyi oldala egyenlő (mindegyikük hossza egyenlő az $A_1 E_1$ szakasz hosszának 2-szeresével), és valamennyi szöge is megegyezik (mindegyik egyenlő az $OA_1 E_1$ szög 2-szeresével). – Ezzel beláttuk állításunkat.

II. megoldás. Az előbbi jelölésekkel: minden i -re az $A_i A_{i+1}$ oldal a körülírt körnek az O középponttól r távolságra lévő húrja, tehát az oldalak egyenlők. Eszerint az $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ (irányított) szög szárai alkalmas elfordítással egyértelműen átvihetők az $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ szög száraiba, tehát a sokszög tetszőleges A_i és A_k csúcsánál levő szögek egyenlők.

Megjegyzések. 1. Ha a két kör középpontja nem esik egybe, akkor a sokszög nem lehet szabályos, oldalai legfeljebb kettesével lehetnek egyenlők. A kisebbik kör nyilván teljesen benne van a nagyobbikban. Ha a kisebbik körül körülforgatjuk az érintő egyenest, az érintőből a nagyobbik kör által kimetszett húr növekszik, majd csökken, és ismét növekszik. A körök középpontjait összekötő tengelyre szimmetrikus helyzetekben a húrok egyenlők, így minden húr hosszúság csak két helyzetben fordul elő, a legkisebb és a legnagyobb húr pedig csak egy-egy helyzetben.

2. Vannak olyan n -szögek, amelyek nem szabályosak, mégis van körülírt és beírt körük, és ezeknek persze nem közös a középpontjuk. Az ilyeneket *bicentrikus* sokszögnek nevezik, azaz *két középponttal* bírónak. Triviális példa erre az $n = 3$ eset, ez semmi különlegességet sem jelent.

1987-05-215-1.eps

2. ábra

De mindjárt más a kérdés, ha a két kör előre van megadva (nem koncentrikusan), és olyan háromszöget keresünk, amely a nagyobbik körbe bele van írva, a kisebbnek pedig köréje. Ha a sugarak R és r , és a középpontok távolsága d , akkor ilyen háromszög létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy $d^2 = R(R - 2r)$ legyen. Ezt az összefüggést *Euler féle relációnak* nevezik. (Lásd pl *Kürschák L. – Hajós Gy. – Neukomm Gy. – Surányi J.: Matematikai Versenytételek*, 1. kötet, Tankönyvkiadó, 1965. 40. oldal.) Ha ez a feltétel teljesül, úgy végtelen sok megfelelő háromszög van (enélkül pedig nincs megoldás). A nagy kör bármely pontjából kiindulva kapunk egyet, hasonlóan a kis kör bármelyik érintőjéből indulva is. Ha pl. a nagy kör A pontjából a kis körhöz húzott érintők másodszorra B -ben és C -ben metszik a nagy kört, akkor a BC egyenes szintén érinti a kis kört.

Ugyanezt a „záródást” sokkal általánosabban bizonyította *J. Poncelet* francia matematikus (1822), tetszőleges két kúpszeletre, tetszőleges n oldalszámra, ha a két kúpszelet eleget tesz bizonyos feltételeknek.

Visszatérve két körre, a bicentrikus 4-, 5-, 6-, 7- és 8-szögekre vonatkozó, R , r és d közti összefüggést már 1794-ben megadta *N. Fuss*, (1755–1826), aki Euler tanítványa és utóda volt. Érdekes hasonlóság van az $n = 3$ és $n = 4$ esetek feltételében, alkalmas rendezéssel így írhatók:

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Az $n = 4, 5, 6$ és 8 esetekre *J. Steiner* (1796–1863) sorra a következő feltételeket közölte (az $n = 8$ -as összefüggést korrigálva közöljük):

$$\begin{aligned} (R^2 - d^2)^2 &= 2r^2(R^2 + d^2); \\ r(R - d) &= (R + d)\sqrt{R - r - d}(\sqrt{R - r + d} + \sqrt{2R}); \\ 3(R^2 - d^2)^4 &= 4r^2(R^2 + d^2)(R^2 - d^2)^2 + 16R^2 d^2 r^4; \\ (R^2 - d^2)^8 - 8(R^2 - d^2)^6(R^2 + d^2)r^2 + 8(R^2 - d^2)^4[8R^2 d^2 + (R^2 + d^2)^2]r^4 - \\ &\quad - 128R^2 d^2(R^2 - d^2)(R^2 + d^2)r^6 + 128R^2 d^2(R^4 + d^4)r^8 = 0. \end{aligned}$$

Megválasztva kettőt R , r és d közül, a harmadikra adódó egyenlet valós gyökei között ún. *idegen* gyökök is előfordulnak, amelyek csak mesterkéltén vagy egyáltalán nem értelmezhetők az eredeti probléma szellemében.

3. Bicentrikus *négyszöget* egyszerűen szerkeszthetünk a beírt körből kiindulva: ehhez érintőket húzva egy merőleges húr párja végpontjaiban, egy húrnégyszög oldalegyeneseit kapjuk. Itt lényegében 3 érintési pontot választottunk meg a beírt körön.

1987-05-215-2.eps

3. ábra

Félig-meddig megfordításnak tekinthető a következő: a bicentrikus négyszög 3 csúcsát megválasztva, megszerkeszthető a negyedik csúcs úgy, hogy rajta legyen az első három csúccsal meghatározott körön, és hogy a négyszögnek valóban legyen beírt (az oldalegyeneseket érintő) köre. (Lásd KöMaL Gy. 787, 1963. október, az 1962. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladata.)