

I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát

$$5(ab + bc + cd + ac + ad + bd) + 3(ac + ad + bd)$$

alakba írva látható, hogy az összeg első tagjában az a, b, c, d számokból készíthető hat darab szorzat összege áll, ami nem más, mint $(a + b + c + d)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ fele. A feltétel szerint a négy szám összege 0, így (1) bal oldala a

$$-\frac{5}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3(ac + ad + bd),$$

a bizonyítandó egyenlőtlenség pedig a

$$(2) \quad 6(ac + ad + bd) \leq 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

alakot ölti.

A (2) bal oldalán a „nem szimmetrikus” $ac + ad + bd$ összeg $(a + b)(c + d) - bc$ alakba írható, és itt a különbség első tagjában a tényezők, $(a + b)$ és $(c + d)$ ellenkező előjelűek, hiszen összegük a feltétel szerint 0. Ezért $(a + b)(c + d) \leq 0$, azaz (2) bal oldala, $6[(a + b)(c + d) - bc] \leq -6bc$, és így elegendő megmutatnunk, hogy

$$-6bc \leq 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Ez viszont könnyen látható, hiszen

$$5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 6bc = 5(a^2 + d^2) + 4\underbrace{(b^2 + c^2 + 2bc)}_{(b+c)^2} + \underbrace{(b^2 + c^2 - 2bc)}_{(b-c)^2}$$

négyszámok összegeként valóban nem lehet negatív.

II. megoldás. A feltételül adott $a + b + c + d = 0$ egyenlőséget négyzetre emelve és 3-mal szorozva kapjuk, hogy

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 6(ab + bc + cd) + 6(ac + ad + bd) = 0,$$

ahonnan rendezés után

$$5(ab + bc + cd) + 8(ac + ad + bd) + ab + bc + cd - 2(ac + ad + bd) + 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 0$$

adódik.

Ezt felhasználva azt kell igazolnunk, hogy

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + ab + bc + cd - 2(ac + ad + bd) \geq 0.$$

A kapott egyenlőtlenség bal oldala az alábbi alakba írható:

$$(a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - d)^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 + \left(c + \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + d^2),$$

ami valóban nem lehet negatív.

Megjegyzés. Mindkét megoldásból látható, hogy egyenlőség csak az $a = b = c = d = 0$ esetben áll fenn.