

Ha a , b és c jelöli a három számot, akkor a feltételek szerint

$$\begin{aligned} (1) \quad & a + b + c = 15; \\ (2) \quad & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{71}{105}. \end{aligned}$$

A (2) bal oldalán közös nevezőre hozva beszorzás után kapjuk, hogy

$$105(ab + bc + ca) = 71abc.$$

Innen $105|71abc$ és mivel $(105, 71) = 1$, ezért $105|abc$. Miután pedig $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, a három szám, a , b és c között van 3-mal osztható, 5-tel osztható és 7-tel osztható is, hiszen egy prímszám – a 3, az 5 vagy a 7 – csak úgy oszthat egy szorzatot – abc -t –, ha osztja valamelyik tényezőjét is. A 3, az 5 és a 7 közül bármely kettőnek a szorzata legalább 15, ezért sem az a , sem a b , sem pedig a c nem lehet közülük kettőnek is a többszöröse, mert ekkor összegük nagyobb volna 15-nél.

A három szám, a , b és c közül tehát az egyik a 3-nak, a másik az 5-nek, a harmadik pedig a 7-nek többszöröse. Miután $3 + 5 + 7 = 15$, a számok pedig pozitívak, ez csak úgy lehet, ha az egyik szám 3, a másik 5, a harmadik pedig 7. Ekkor (1) nyilván teljesül, és azonnal látható, hogy (2) is.

A keresett három szám tehát a 3, az 5 és a 7.

Megjegyzések. 1. A $105|abc$ feltételből másképp is célhoz érhetünk. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

ahonnan köbre emelés után $abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = 125$. Innen csak $abc = 105$ lehetséges. Mindhárom szám nagyobb 1-nél, hisz reciprokuk összege kisebb, mint 1, tehát $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ miatt a számok: 3, 5 és 7.

2. A (2)-ből nyerhető $\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{71}{105}$ egyenlőségből sokan következtettek arra, hogy $ab + ac + bc = 71$ és $abc = 105$, azaz a két törtben külön-külön egyenlő a számláló és a nevező. Bár jelen esetben valóban ez a helyzet, általában elképzelhető, hogy a $\frac{71}{105}$ a bal oldali tört egyszerűsített alakja, így a következtetés hibás. Ugyanígy az sem igaz, hogy a 105 az a , b és c legkisebb közös többszöröse.

Mindkét állításra ellenpélda az $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{17}{21}$ egyenlőség, hiszen $2 \cdot 6 \cdot 7 \neq 21$ és $[2, 6, 7] \neq 21$.