

**I. megoldás.** Az  $ABM$  és a  $CDM$  háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők. Tudjuk, hogy hasonló háromszögek esetén a megfelelő oldalak aránya a háromszögek területei arányának négyzetgyöke, tehát

$$\frac{CD}{AB} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2, \text{ azaz } CD = 2 \cdot AB.$$

1987-04-161-1.eps

A trapéz területének kiszámításához szükségünk van az  $AB$  és  $CD$  alapok távolságára, amely az  $ABM$  és a  $CDM$  háromszögek  $AB$ , illetve  $CD$  oldalhoz tartozó magasságának összege. Az oldalhoz tartozó magasságot a terület ismeretében meghatározva kapjuk, hogy a trapéz párhuzamos oldalainak  $m$  távolsága:

$$m = \frac{2 \cdot T_{ABM}}{AB} + \frac{2 \cdot T_{CDM}}{CD} = \frac{4}{AB} + \frac{16}{CD} = \frac{4}{AB} + \frac{8}{AB} = \frac{12}{AB}.$$

Innen a trapéz  $T$  területe:

$$T = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot m = \frac{1}{2}(AB + 2 \cdot AB) \cdot \frac{12}{AB} = 18.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

**II. megoldás.** Megmutatjuk, hogy az  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CDM$  háromszögek területe – ebben a sorrendben – mértani sorozatot alkot.

Az  $ABM$  és a  $BCM$  háromszögek  $B$  csúcshoz tartozó magassága közös, tehát területük aránya megegyezik  $B$ -vel szemközti oldaluk arányával:

$$(1) \quad \frac{T_{ABM}}{T_{BCM}} = \frac{AM}{MC}.$$

A  $BCM$  és a  $CDM$  háromszögeknek pedig a  $C$  csúcshoz tartozó magassága közös, tehát:

$$(2) \quad \frac{T_{BCM}}{T_{CDM}} = \frac{BM}{MD}.$$

Mivel az  $ABM$  és a  $CDM$  háromszögek hasonlóak, (1) és (2) jobb oldala egyenlő, tehát a területek valóban mértani sorozatot alkotnak. Ezért ha  $T_{ABM} = T$ ,  $T_{CDM} = t$ , akkor  $T_{BCM} = \sqrt{Tt}$ . Tudjuk, hogy a  $DAM$  háromszög területe megegyezik a  $BCM$  háromszög területével, (ez a fenti bizonyításból is kiderül, de egyszerűbben kapjuk, ha mindkettőhöz hozzávesszük a  $CDM$  háromszöget, és így az egyenlő területű  $BCD$  és  $ACD$  háromszögekhez jutunk) tehát a trapéz területe :

$$T + t + 2\sqrt{Tt}.$$

Adatainkat behelyettesítve, a keresett terület:  $2 + 8 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 8} = 18$ .