

Az áttekinthetőség kedvéért módosítsuk úgy a játékot, hogy a résztvevők előtt kezdetben egy 39 kavicsból álló halom van, és ebből *vesznek el* felváltva legalább egyet és legfeljebb ötöt – illetve hármat – úgy, hogy az éppen soron következő játékos nem vehet el ugyanannyit, mint ellenfele az előző lépésben. A játék vesztese az, aki nem tud lépni. Erre vagy úgy kerül sor, hogy társa elvette az utolsó kavicsot (kavicsokat), vagy pedig úgy, hogy az 1 kavicsot vett el, és a halomban is egyetlen kavics maradt. A most következő játékosnak ugyanis ekkor a feltétel szerint legalább két kavicsot kellene elvennie, amit nyilván nem tehet meg. Ez a változat nyilván ekvivalens a feladatbeli játékkal.

Hívjuk n -játéknak a fenti játékot abban az esetben, ha kezdetben n darab kavicsból áll a halom, ezenkívül adott n esetén jelölje I és II a kezdő, illetve a második játékost. A játék első lépése után nyilván egy ugyanilyen típusú n' -játékhoz jutunk, csak I és II szerepe fölcserélődik, másrészt a mostani kezdő – vagyis az eredeti II – számára egy kezdési – valójában folytatási – lehetőséget a feltétel kizár.

A megoldást ezután a következő általános észrevétel alapján kaphatjuk meg. Egy adott n -játékban akkor és csak akkor nyer I, ha van olyan megengedett lépése, amellyel egy II számára kedvező n' -játékot tud létrehozni, és akkor nyer II, ha I bármely lépésével I számára kedvező m' -játék jön létre. Tekintsük ezután a játékot az első esetben, azaz amikor a mindenkor n 1 és 5 közti értékekkel csökkenthető.

A) Ha egy n' játékot II nyer, akkor az $n' + 1$, $n' + 2$, $n' + 3$, $n' + 4$, $n' + 5$ játékokat I nyeri, ha rendre 1, 2, 3, 4, 5-tel kezd, és ezután II-nek az n' -beli nyerő stratégiája szerint játszik. Ha nem volna az előző lépés megismétlését tiltó korlátozás, akkor az $n' + 6$ játékot ismét II nyerhetné meg, és így az ilyen, II számára kedvező játékok 6-os periódussal következnenek. Most azonban lehetséges, hogy az $(n' + 3)$ -játékot I *csak* a 3 kezdéssel nyerheti meg, és ha ekkor az $(n' + 6)$ játékbeli I is 3-mal kezd, akkor II számára ezután nem lehetséges a nyerő folytatás, így az $(n' + 6)$ -játékot is I nyeri. Ez a helyzet például a 6-játék esetében, mert a 3-játékot I csak a 3-mal kezdve nyerheti meg. (A 2-játékban a 2-n kívül 1-gyel is kezdhet.) Látható, hogy épp a korlátozás teszi lehetővé, hogy I időnként többféle kezdéssel is megnyerhesse a játékot.

Egy a II számára kedvező n' játék tehát kétféle lehet. Ha az $(n' + 3)$ játékot I többféleképpen is megnyerheti – tehát nem csak úgy, ha 3-mal kezd –, akkor az $(n' + 6)$ játékot II nyeri, hiszen ha I itt 3-mal kezd, akkor II választhat ettől különböző nyerő folytatást, más kezdésre pedig II megengedett módon léphet a számára kedvező n' játékba.

Ez a helyzet például az $n' = 7$ esetben. Ilyenkor ugyanis az $n' + 3 = 10$ -játékban I nemcsak 3-mal, hanem 5-tel kezdve is nyer, hiszen a létrejövő 5 játékban most nem lehetséges az egyetlen nyerő folytatás, az 5. Hívjuk ilyenkor az n' játékot *hatos játéknak*.

Ha viszont az $(n' + 3)$ játékban I csak a 3-mal kezdve nyerhet, akkor ugyanígy kezdve az $(n' + 6)$ játékot is megnyerheti, hisz II-nek ezután csak vesztes folytatása van. Megmutatjuk, hogy ekkor viszont mindenképpen II nyeri a következő, $(n' + 7)$ -játékot. Valóban, ha itt I az 1-gyel kezd, akkor II számára megengedett a 3-as nyerő folytatás, 1-nél nagyobb kezdésre pedig ezzel ellentétes paritású, tehát mindenképpen különböző folytatással léphet II a számára kedvező n' játékba. Hívjuk ebben a második esetben az n' játékot *hetes játéknak*. A 0-játék – amelyet nyilván II nyer, hisz I egyáltalán nem tud lépni – eszerint hetes.

A II számára kedvező n' játékok tehát hatos vagy hetes játékok aszerint, hogy $(n' + 6)$ vagy pedig $(n' + 7)$ a következő, II számára kedvező játék.

Megmutatjuk, hogy a hetes és a hatos játékok *felváltva* követik egymást. Ebből következik, hogy $39 = 3 \cdot 13$ a II számára kedvező, azaz az első változatban Balázs lesz a győztes – ha jól játszik.

Láttuk, hogy egy n' játék akkor és csak akkor hetes, ha az $(n' + 3)$ játékban I bármely 3-tól különböző kezdéssel veszít (3-mal kezdve természetesen nyer). Nos, ha 1-gyel vagy 2-vel kezd, akkor 2-vel, illetve 1-gyel folytatva II nyer, hisz n' -be jutva ismét ő a második. Ha pedig I a 4-gyel kezd, akkor $(n' - 1)$ -ben 3 vagy 5 nyerő folytatás – attól függően, hogy hetes vagy pedig hatos-e az n' -t megelőző, II számára kedvező játék –, és most II számára mindkettő megengedett.

Ez azt jelenti, hogy csak az 5-ös kezdést kell megvizsgálnunk, azaz n' pontosan akkor hetes, ha I az $(n' + 3)$ -játékot 5-tel kezdve elveszti.

Tekintsük az n' előtti, II számára kedvező játékot, amelyik tehát $n' - 6$ vagy pedig $n' - 7$. Ha I az $(n' + 3)$ -játékban 5-tel kezd, akkor az első esetben II nyer, ha 4-gyel folytatja, hisz így az $(n' + 3) - (5 + 4) = n' - 6$ játékba jut. Ekkor tehát I valóban csak 3-mal kezdve nyer, azaz n' hetes játék, vagyis egy hatos játékot valóban hetes játék követ.

Megfordítva, ha az n' előtti II számára kedvező játék hetes, azaz $n' - 7$, és I az $(n' + 3)$ -játékban 5-tel kezd, akkor a kapott $(n' - 2)$ -játékban most nem lehetséges az $(n' - 7)$ -be vivő 5-ös lépés. II minden más lépésére viszont I számára megengedett az azt 5-re kiegészítő folytatás, amellyel az $(n' - 7)$ játékba jutva II-ként nyerni tud.

Ezzel azt is igazoltuk, hogy hetes játékot hatos követ, és így a játék első változatát teljes egészében jellemeztük. II akkor és csak akkor nyerhet, ha $n = 13k - 6$ vagy $n = 13k$, ahol $k \geq 1$ egész, és a bizonyításból egy nyerő stratégia is kiolvasható a játékosok számára, ennek végig gondolását azonban az olvasóra hagyjuk.

B) Hasonlóan vizsgálható a második eset, tehát amikor 1 és 3 közé eső számokkal csökkenthető az összeg. Könnyen látható, hogy az $n = 1, 2, 3$ esetben I, míg $n = 4$ -re II nyer. Most nem lép fel a periódus előbbi „elcsúszása”, hiszen a 2-játékot I kétféleképpen, 2-vel és 1-gyel kezdve is megnyerheti. Általában is ez a helyzet, korábbi szóhasználatunkkal élve minden a II számára kedvező játék „négyes”. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

Ha $n' = 0$ – ez nyilván II számára kedvező, hisz I nem tud lépni –, akkor a fentiek szerint az állítás igaz. Ha most a II számára kedvező n' játéknál kisebb játékokra az állítás igaz, akkor a megelőző, II számára kedvező játék az $(n' - 4)$. Az előző esethez hasonlóan az $(n' + 4)$ játékban akkor nyerhet II, ha az $(n' + 2)$ -játékban I nyerő kezdése

nem egyértelmű, a 2-n kívül 1-gyel kezdve is nyerni tud. Ez pedig abból következik, hogy az $(n' + 1)$ -játékot I csak az 1 kezdéssel nyerheti meg, hiszen akár 2-vel, akár pedig 3-mal kezd, az ezt 5-re kiegészítő folytatással II az indukciós feltevés szerint számára kedvező $(n' - 4)$ -játékba kerül. Ezzel beláttuk, hogy ha $(n' - 4)$ négyes játék, akkor n' is az.

A második esetben tehát az $n = 4k$ alakú játékokban nyerhet II, így ilyenkor Anna nyeri a játékot.