

Megmutatjuk, hogy három, egyenként $\frac{\sqrt{65}}{16} \approx 0,5039$ sugarú körrel lefedhető az egységnégyzet, kisebb körökkel viszont nem.

1987-03-110-1.eps

Legyen E az $ABCD$ egységnégyzet CD oldalának felezőpontja, F és G pedig azok a pontok a CD -vel szomszédos AD , illetve BC oldalon, amelyekre $AG = GE = EF = FB = 2r$ (lásd ábra). Egyszerű számolással kapjuk, hogy ekkor $AF = BG = \frac{1}{8}$, $r = \frac{\sqrt{65}}{16}$. Ha most három darab r sugarú kört úgy helyezünk el, hogy középpontjaik rendre az AG , GE és FE szakaszok felezőpontjai legyenek, akkor az első kör átmegy az A , B , F , G ; a második a C , E , G ; a harmadik pedig a D , E , F pontokon, és a három kör nyilván lefedi a teljes egységnégyzetet.

Tegyük fel, hogy három $r' < r$ sugarú körrel is megvalósítható a lefedés. Mivel a három kör a négyzetnek mind a négy csúcsát lefedi, ezért a körök között van olyan – nevezzük ezt első körnek –, amelyik legalább két csúcsot fed le. Ez a két csúcs nem lehet átellenes, mert az ilyenek távolsága nagyobb, mint körünk átmérője, egy kör viszont csak olyan pontokat fedhet le, amelyek távolsága nem nagyobb az átmérőjénél. Válasszuk a négyzet csúcsainak betűzését úgy, hogy az első kör az A és a B csúcsokat fedje le! Ez a kör így már nem fedheti le sem a G , sem pedig az F pontot, mert $AG = BF = 2r > 2r'$. A G és az F pontokat viszont szintén ugyanannak a – nevezzük másodiknak – körnek kell lefednie, mert ha a G pontot a második, az F pontot pedig a harmadik kör fedné le, akkor $EF = EG = 2r > 2r'$ és $AE = \frac{\sqrt{80}}{8} > 2r > 2r'$ miatt az E pontot már egyik kör sem fedhetné le. A második kör $CF = DG = \frac{\sqrt{113}}{8} > \frac{\sqrt{65}}{8} = 2r > 2r'$ miatt nem fedheti le a C és D pontokat, tehát ezeket is a harmadik körnek kell lefednie.

Összefoglalva: az első kör lefedi az A és B , a második az F és G , a harmadik pedig a C és D pontokat. Tekintsük most az AD oldal H felezőpontját! Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$BH = CH = \frac{\sqrt{80}}{8} > \frac{\sqrt{65}}{8} = 2r > 2r'$$

és

$$GH = \frac{\sqrt{73}}{8} > \frac{\sqrt{65}}{8} = 2r > 2r'.$$

A H pontot így a három kör egyike sem fedheti le. Ez ellentmondás, tehát az egységnégyzet valóban nem fedhető le három $\sqrt{65}/16$ -nál kisebb sugarú körrel.