

Ha $n = 1$, akkor egyenletünk azonosság, ilyenkor tehát minden valós szám megoldás. A továbbiakban legyen $n > 1$. Két n -edik hatvány különbsége szorzattá alakítható. Ennek megfelelően (1)-ből

$$1 = x^n - (x - 1)^n = [x - (x - 1)][x^{n-1} + x^{n-2}(x - 1) + \dots + x(x - 1)^{n-2} + (x - 1)^{n-1}],$$

azaz

$$(2) \quad 1 = x^{n-1} + x^{n-2}(x - 1) + \dots + x(x - 1)^{n-2} + (x - 1)^{n-1}.$$

Ha $x > 1$, akkor (2) jobb oldalán már az első tag is nagyobb 1-nél, a további tagok pedig pozitívak. Ezért (1)-nek nincs 1-nél nagyobb gyöke.

Ha $x = 1$, akkor (1) mindkét oldalán 0 áll, így az 1 megoldása egyenletünknek.

Vezessük most be a $t = 1 - x$ változót. Ezzel (1)-ből a t -re mint ismeretlenre a $(-t)^n = (-t + 1)^n - 1$ egyenletet kapjuk. Ha n páros, akkor ez a

$$(3) \quad t^n = (t - 1)^n - 1,$$

ha pedig n páratlan, akkor rendezés után a

$$(4) \quad (t - 1)^n = t^n - 1$$

alakot ölti. Vegyük észre, hogy az utóbbi esetben t -re éppen az eredeti, (1) egyenletet kaptuk. Ezért páratlan n -re egyrészt megoldás a $t = 1$ alapján kapott $x = 0$, másrészt, mivel a fentiek szerint (4)-nek nincs olyan megoldása, amire $t = 1 - x > 1$, páratlan n -re (1)-nek nincs $x < 0$ megoldása.

Legyen az n továbbra is páratlan. Tisztáznunk kell még, van-e gyöke (1)-nek a $(0, 1)$ nyílt intervallumban. A tagadó válasz például (2) jobb oldalának behatóbb vizsgálatából is kiderül, egyszerűbben kapjuk azonban az ilyenkor nyilván teljesülő

$$(x - 1)^n > x - 1 > x^n - 1$$

egyenlőtlenségből. Ezzel az 1-nél nagyobb páratlan kitevők esetét teljes egészében tisztáztuk.

Páros n -re azt állítjuk, hogy (1)-nek nincs 1-nél kisebb gyöke sem, vagy ami ezzel ekvivalens, (3)-nak nincs pozitív megoldása. Valóban, ha $0 < t < 1$, akkor $|t - 1| < 1$, így (3) jobb oldala negatív, a bal oldal pedig nem az. Végül ha $t \geq 1$, akkor $t > t - 1 \geq 0$, így $t^n > (t - 1)^n$, tehát továbbra is (3) bal oldala a nagyobb.

Összefoglalva, ha $n = 1$, akkor (1)-nek minden valós szám gyöke. Ha $n > 1$ és páros, akkor (1) egyetlen megoldása $x = 1$; ha pedig $n > 1$ és páratlan, akkor (1)-nek két megoldása van: $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$.

Megjegyzés. A talált eredmények megsejthetők az $f(x) = (x - 1)^n$ és a $g(x) = x^n - 1$ függvények grafikonjának fölvázolása alapján – mindkettő egységnyi eltolással származtatható az x^n hatványfüggvény grafikonjából, előbbi az x , utóbbi pedig az y tengellyel párhuzamosan (1 – 2. ábrák).

1986-12-450-1.eps

1. ábra

1986-12-450-2.eps

2. ábra

Több dolgozat páros n -re „parabolának” nevezte a szóban forgó görbéket, és még a megoldásban is hivatkoztak erre, mondván, hogy „egyállású egybevágó parabolának nem lehet egynél több metszéspontjuk”. Általános esetben mind az elnevezés, mind pedig az indoklás hibás (bár a konklúzió jelen esetben helyes), a görbék csak az $n = 2$ esetben parabolák.