Az áttekinthetőség kedvéért legyen $S = 84$, az út hossza. A három gyerek útjának összege így legalább $3S$ – több is lehet, ha nem csak előre mozognak – és ha a gyalogszerrel megtett utak összege legalább S – ami mindig igaz, ha üres bicikli nem vontatható –, akkor van olyan gyerek, aki az útnak legalább az egyharmadán gyalogol, és így neki legalább $1/3 \cdot S : 5 + 2/3 \cdot S : 20 = S/10 = 8{,}4$ órára van szüksége a célba jutáshoz. Láttuk a 2289. gyakorlat megoldásában, hogy ennyi idő már elegendő.[1]

A fentiek szerint az új feltétel – üres bicikli vontatása – csak úgy teheti lehetővé a felhasznált idő csökkentését, ha a gyalogosan megtett utak összege S-nél kevesebb. Ilyenkor vannak az útnak olyan részei, ahol senki sem gyalogol. Vizsgáljuk most az ilyen utazásokat, azaz legyen a gyalogosan megtett utak összege αS, ahol $0 \leqq \alpha < 1$. Ilyenkor legalább $(1-\alpha)S$ hosszúságú útszakaszon mindhárman biciklizve jutnak át – hívjuk *biciklis szakaszoknak* az út ilyen részeit.

Vizsgáljuk meg, hogy a biciklik és a gyerekek külön-külön legalább mennyi időt töltenek az úton. Bár a feladat csak a gyerekek célba jutását írja elő, nyilván föltehető, hogy a kerékpárok is eljutnak a célba.

A biciklis szakaszok minden B pontján tehát kerékpáron jutnak át a gyerekek. Mivel csak két bicikli van, ezért egyikük nyergében legalább ketten haladnak át a B ponton, ami azt jelenti, hogy ennek a biciklinek üresen visszafelé is át kell haladnia B-n. Mivel önállóan nem közlekedhet és itt senki nem gyalogol, a másik biciklinek kell visszafelé vontatnia, és ez most lehetséges is. Miután pedig a biciklik végül célba érnek, a két biciklinek újra át kell jutnia B-n, immár előre mozogva.

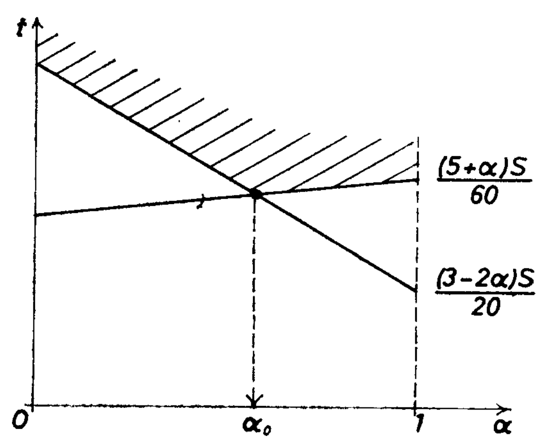
A biciklis szakaszokon tehát mindkét kerékpár legalább háromszor halad át, kétszer előre, egyszer pedig visszafelé. Tudjuk emellett, hogy a biciklik a gyalogutakon is átjutnak, ezért külön-külön legalább $\alpha S + 3(1-\alpha)S = (3-2\alpha)\cdot S$ utat tesznek meg. Ehhez pedig legalább $(3-2\alpha)S : 20$ órára van szükség.

Próbáljuk most megbecsülni a gyerekek által felhasznált idők összegét. Az összesen $3S$ hosszúságú útból $\alpha \cdot S$ utat gyalog, a fennmaradó $(3-\alpha)S$ utat pedig biciklizve teszik meg a gyerekek. Láttuk ugyanakkor, hogy a biciklis szakaszokon egy biciklistának visszafelé is el kell haladnia – a másik, üres biciklit vontatva – és így ő ezt a szakaszt előre mozogva is kétszer teszi meg.

A gyerekek biciklin megtett útjának összege ezért valójában a $(3-\alpha)S$ „tiszta” előre mozgásnál a biciklis szakaszoknak legalább a kétszeresével több, azaz legalább $(3-\alpha)S + 2(1-\alpha)S = (5-3\alpha)S$.

A gyerekek utazással töltött idejének összege így legalább $\dfrac{\alpha S}{5} + \dfrac{(5-3\alpha)S}{20} = \dfrac{(5+\alpha)S}{20}$. Van tehát a három gyerek között olyan, aki ennek az időnek legalább az egyharmadát, $\dfrac{(5+\alpha)S}{60}$ órát tölt az úton.

A célba jutáshoz szükséges idő így a biciklik miatt legalább $\dfrac{(3-2\alpha)S}{20}$ óra, a gyerekek miatt pedig legalább $\dfrac{(5+\alpha)S}{60}$ óra.



1. ábra

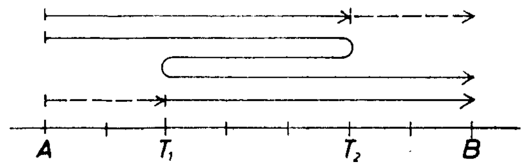
Ábrázoljuk a kapott alsó korlátokat az α függvényében (1. ábra). Ekkor a lehetséges $(\alpha,\ t)$ párok a satírozott tartományban helyezkednek el. A két határoló egyenes meredeksége ellenkező előjelű, a tartomány „legmélyebb” pontja tehát a határoló egyenesek metszéspontja, amelynek α_0 abszcisszája a $\dfrac{(3-2\alpha)S}{20} = \dfrac{(5+\alpha)S}{60}$ egyenlet megoldásával $\alpha_0 = \dfrac{4}{7}$.

A gyerekek célba jutásához így legalább $\dfrac{3-2\alpha_0}{20}S = \dfrac{5+\alpha_0}{60}S = \dfrac{13}{140}S = 7{,}8$ óra szükséges. Ez kevesebb, mint a 2289. gyakorlatban kapott $8{,}4$ óra, de meg kell mutatnunk, hogy meg is valósítható.

[1] 1986. áprilisi szám, 170–171. old.

A fentiekből kiolvasható, hogy erre úgy kerülhet sor, ha a gyalogosan megtett utak összege $\frac{4}{7}S$.

Jelöljük ki az $AB = S$ hosszúságú úton a T_1 és T_2 pontokat úgy, hogy $AT_1 = T_2B = \frac{2}{7}S$ legyen (2.ábra).



2. ábra

Induljon az A-ból egy gyerek gyalog, a másik kettő pedig biciklivel. A T_2 pontban az egyik biciklista szálljon le és gyalogoljon tovább a B felé, társa pedig az üres biciklit vontatva forduljon vissza. Mire a T_1-be ér, összesen $AT_2 + T_2T_1 = \frac{8}{7}S$ utat tesz meg, és így a negyedakkora sebességgel kezdettől gyalogló harmadik eddigre $\frac{2}{7}S = AT_1$ út után éppen ideér. Késedelem nélkül felülhet tehát a visszahozott kerékpárra, és mindketten egészen a célig biciklizhetnek. Az is látszik, hogy ekkor a T_2-ben elhagyott gyaloglóval egy időben érnek az út végére, hiszen az elválás után az a még hátralevő $T_2B = \frac{2}{7}S$ utat éppen annyi idő alatt teszi meg, mint biciklit vontató társa a négyszer akkora $T_2T_1 + T_1B = \frac{8}{7}S$ utat. (A 2. ábrán szaggatott és folytonos szakaszok jelzik a gyalogosan, illetve biciklivel megtett útszakaszokat.)

Ilyen körülmények között tehát mindhárman egyszerre érnek célba, az elhasznált idő pedig nyilván $\frac{2}{7}S : 5 + \frac{5}{7}S : 20 = \frac{13}{140}S = 7{,}8$ óra.

A három gyerek tehát 7,8 óra alatt eljuthat a célba, ennél rövidebb idő alatt viszont nem.

Megjegyzések. 1. Látható, hogy nem a fenti az egyetlen olyan útiterv, amely biztosítja, hogy éppen $7,8$ óra alatt érjenek célba a gyerekek. Újabb lehetőségeket kapunk, ha szakaszokra osztjuk az AB utat és minden egyes szakaszon a fenti módszer szerint szervezzük meg az utazást.

2. Könnyű meggondolni, hogy az üres kerékpár vontatása akkor teszi lehetővé az utazáshoz szükséges idő rövidítését, ha a kerékpáros és a gyalogos sebességének az aránya nagyobb, mint 3. Ekkor érdemes ugyanis biciklis szakaszt közbeiktatni, hisz ezen még a visszaút árán is gyorsabban jutnak túl, mint gyalogszerrel.