

Az osztály minden tanulója szakköri tag, hisz mindegyikük még közös szakkörbe is jár valaki mással. (Persze feltesszük, hogy az osztályba legalább ketten járnak.) Ugyanezért ha valaki csak egy szakkörbe jár, akkor ennek a bizonyos szakkörnek mindenki tagja és ez még több is, mint a bizonyítandó állítás. Ezért a továbbiakban a feladat második feltételét módosítva fölteszük, hogy minden gyerek *pontosan* két szakkörnek a tagja.

Tekintsünk most valakit az osztályból, és legyen  $S_1$  és  $S_2$  az a két szakkör, ahová ő jár. Az első feltétel szerint ekkor mindenki tagja  $S_1$ , és  $S_2$  közül valamelyiknek – esetleg mindkettőnek. A két szakkör egyikébe ezért az osztálynak legalább a fele jár, azonban ez még kevés.

Ha most  $S_1$ -ben vagy  $S_2$ -ben mindenki ott van, akkor megint csak készen vagyunk, így föltehető, hogy van olyan  $g_2$  gyerek, aki nem jár  $S_1$ -be (de ekkor muszáj  $S_2$ -be járnia egy előbbi megállapításunk alapján), és olyan  $g_1$  is, aki  $S_1$ -be jár, de  $S_2$ -be nem. Jelölje  $S$  az egyik szakkört, ahová a feltétel szerint  $g_1$  és  $g_2$  is jár ( $S \neq S_1$  és  $S \neq S_2$ ). Állítjuk, hogy  $S$ -nek  $g_1$ -gyel és  $g_2$ -vel együtt éppen azok a tagjai, akik  $S_1$  és  $S_2$  közül pontosan az egyik szakkörbe járnak.

Valóban, ha valaki  $S_1$ -nek is és  $S_2$ -nek is tagja, akkor  $S$ -ben már nem lehet ott, hisz ez már kettőnél több szakkör volna. Ha pedig valaki például  $S_1$ -be jár, de  $S_2$ -be nem – mint  $g_1$  –, akkor az  $S_2$ -be és  $S$ -be járó  $g_2$ -vel közös szakköre csak az  $S$  lehet.

Számoljuk meg ezután a tagokat  $S_1$ -ben,  $S_2$ -ben és  $S$ -ben. A fentiek szerint mindenkire éppen kétszer kerül sor:  $S_1$  és  $S_2$  közös tagjaira  $S_1$ -ben, illetve  $S_2$ -ben, a többiekre  $S_1$ -ben és  $S$ -ben – mint például  $g_1$  –, illetve  $S_2$ -ben és  $S$ -ben – mint például  $g_2$ . A három szakkör létszámának az összege ezért az osztály létszámának a kétszerese, így valóban van köztük olyan, ahová az osztálynak legalább a kétharmad része jár.