

Az egyenlet értelmezési tartománya alapján $x + y > 0$. Megmutatjuk, hogy ebben az esetben az első egyenletből $x + y = 1$ következik.

Ha $x + y > 1$, akkor $x^2 + y^2 > \frac{x^2 + y^2}{x + y}$. Az első egyenlet szerint így

$$1 = x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x + y} > \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{x + y} = x + y > 1,$$

és ez nyilván nem lehetséges. Hasonlóan ellentmondásra vezet a $0 < x + y < 1$ föltevés is.

Ezután a második egyenlet az $x^2 - y = 1$ alakot ölti, ahonnan, újra fölhasználva az $x + y = 1$ összefüggést, kapjuk, hogy $x^2 + x = 2$, azaz $x = 1$ vagy $x = -2$.

Az egyenletrendszer megoldásai tehát az

$$x_1 = 1; \quad y_1 = 0 \quad \text{és az} \quad x_2 = -2; \quad y_2 = 3$$

számpárok közül valók, és látható, hogy mindkét számpár valóban megoldás.

* * *

Megjegyzések. 1. Jobban látszik az első egyenlet szerkezete, ha észrevevesszük, hogy annak 0-ra redukált bal oldala beszorzás után szorzattá alakítható. Valóban,

$$\left(x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x + y} - 1\right)(x + y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + 2xy - x - y,$$

amiről pedig némi ügyeskedéssel kiderül, hogy nem más, mint

$$(x + y - 1)(x^2 + y^2 + x + y).$$

Ha most $x + y > 0$, akkor a második tényező pozitív, így ha a szorzat 0, akkor $x + y = 1$.

2. Ismeretes, hogy egész együtthatós egyváltozós polinom egész gyökei, és így a megfelelő elsőfokú gyöktényezők, véges sok próbálkozással megkaphatók: az egész gyökök a polinom konstans tagjának az osztói.

Hasonló, a szorzatalak fölismerését megkönnyítő állítás kétváltozós egész együtthatós polinomokra is igaz. Amennyiben a $p(x, y)$ polinom szorzattá alakítható úgy, hogy az egyik tényező az egyik változóban – pl. az x -ben – elsőfokú, akkor ennek a tényezőnek az x változót nem tartalmazó tagja (mint az y változó polinomja) osztója a $p(x, y)$ polinom x -ben nulladfokú „tagjának”. Mostani példánk jól szemlélteti a fenti állítást.

Rendezzük az előbbi kétváltozós polinomot x hatványai szerint:

$$p(x, y) = x^3 + yx^2 + (y^2 + 2y - 1)x + y^3 - y.$$

Az „együtthatók” most az y változó polinomjai, az x -ben 0-adfokú tag, $y^3 - y = y(y - 1)(y + 1)$. A $p(x, y)$ polinom szimmetrikus az x, y változókban, úgy hogy az elképzelhető $x - \lambda y$, $x - \lambda(y - 1)$, $x - \lambda(y + 1)$ „gyöktényezők” közül a $\lambda = -1$ -hez tartozó szimmetrikus $x + y$, $x + y + 1$, valamint $x + y - 1$ „osztókkal” érdemes próbálkoznunk.

A maradékos osztásokat a jól ismert Horner-eljárás szerint végezve az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze az eredményeket:

„Gyökök” \ „Együtthatók”	1	y	$y^2 + 2y - 1$	$y^3 - y$
$-y$	1	0	$y^2 + 2y - 1$	$\overline{-2y^2}$
$-y - 1$	1	-1	$y^3 + 3y$	$\overline{-4y^2 - 4y}$
$-y + 1$	1	1	$y^2 + y$	$\overline{0}$

Az utolsó esetben az $[x - (-y + 1)]$ „gyöktényezővel” osztva valóban 0 maradékot kapunk, és a hányados „együtthatói” is leolvashatók. Így

$$p(x, y) = (x + y - 1)(x^2 + x + y^2 + y).$$