

Jelöljük a pontokat A, B, C, D, E -vel! A, B és C legyenek egy a oldalú szabályos háromszög csúcsai. D legyen az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán mint C , mégpedig az AB szakasz felező merőlegesén C -től a távolságra. Jelöljük az $AD = BD$ távolságot b -vel. Legyen E az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán mint B , mégpedig az AC szakasz felező merőlegesén a B -től b távolságra. Jelöljük végül az $AE = CE$ távolságot c -vel, a DE távolságot d -vel! Megmutatjuk, hogy az $ABCDE$ pontötös kielégíti a feladat feltételeit.

1986-11-387-1.eps

A pontok felvételéből adódóan $AB = BC = CA = CD = a$, $AD = BD = BE = b$, $AE = CE = c$ és $ED = d$. Először bebizonyítjuk, hogy az a, b, c, d távolságok közt nincs két egyenlő. Ehhez a következő ismert tételt használjuk fel: egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

A CD egyenes az $ACB \triangleleft$, a BE egyenes az $ABC \triangleleft$ szögfelezője, tehát:

$$ACD \triangleleft = BCD \triangleleft = ABE \triangleleft = CBE \triangleleft = 150^\circ.$$

A BCD háromszög egyenlő szárú, ezért

$$CBD \triangleleft = CDB \triangleleft = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ.$$

A DBE háromszög is egyenlő szárú, szárszöge:

$$DBE \triangleleft = CBE \triangleleft - CBD \triangleleft = 150^\circ - 15^\circ = 135^\circ,$$

alapon fekvő szögeire így $BDE \triangleleft = BED \triangleleft = 22,5^\circ$ adódik.

Az ACD háromszögben $ACD \triangleleft > CDA \triangleleft$, tehát $a < b$. A CBE háromszögben $CBE \triangleleft > BCE \triangleleft$, tehát $b < c$. Végül a CDE háromszögben $CDE \triangleleft = CDB \triangleleft + BDE \triangleleft = 15^\circ + 22,5^\circ = 37,5^\circ$, $CED \triangleleft < BED \triangleleft = 22,5^\circ$, tehát $DCE \triangleleft > 180^\circ - (37,5^\circ + 22,5^\circ) = 120^\circ$, vagyis $c < d$. A fellépő távolságok száma így megfelel a feltételeknek.

$$\begin{aligned} BAC \triangleleft &= CBA \triangleleft = ACB \triangleleft = 60^\circ \\ ACD \triangleleft &= BCD \triangleleft = ABE \triangleleft = CBE \triangleleft = 150^\circ \\ CBD \triangleleft &= CDB \triangleleft = 15^\circ & DBE \triangleleft &= 135^\circ \\ BDE \triangleleft &= BED \triangleleft = 22,5^\circ \end{aligned}$$

A szögek ismeretében nyilvánvaló, hogy semelyik 3 pont nincs egy egyenesen. Az $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$ és $ACDE$ négyszögek mindegyike konkáv, ezért ezek a pontnégyesek nem lehetnek egy körön. A $BCDE$ négyszög sem húrnégyszög, mert $CBE \triangleleft + CDE \triangleleft = 150^\circ + 37,5^\circ = 187,5^\circ \neq 180^\circ$.

Ezzel beláttuk, hogy a megadott öt pont a feladat minden követelményét kielégíti.

Megjegyzés. Természetesen az öt pont nemcsak a megoldásban leírt módon helyezkedhet el. A feltételeket a következő pontötös is kielégíti: A, B, C legyenek egy szabályos háromszög csúcsai, D a háromszög középpontja, E pedig az A középpontú AB sugarú kör és az AC szakasz felező merőlegesének egyik metszéspontja. Ez a konfiguráció, valamint a feladattal kapcsolatos egyéb érdekességek megtalálhatók lapunk 1980. évi 7. számában *Erdős Pál: Néhány elemi geometriai problémáról* c. cikkében.