

Tekintsük a feladatot megoldottnak! Az  $ABC$  háromszög oldalait a szokásos módon jelöljük  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel, az  $A$  csúsból induló belső szögfelező és a  $BC$  oldal metszéspontja legyen  $M$ ! Ezekkel a jelölésekkel feladatunk a következő: Szerkesztendő az  $ABC$  háromszög, ha ismerjük az  $a$  oldalt, a  $\frac{b}{c}$  arányt, valamint az  $AM$  szakasz hosszát.

1986-11-384-1.eps

Ha az adott  $\frac{b}{c}$  arány 1, akkor a háromszög egyenlő szárú, tehát az  $AM$  szakasz rajta van az  $a$  oldal felező merőlegesén. Ezt felhasználva a szerkesztés: Felvesszük az  $a$  oldalt, megszerkesztjük a felező merőlegesét, erre az oldal felezőpontjából felmérjük az  $AM$  távolságot, így megkapjuk a háromszög harmadik csúcsát. Ez a szerkesztés nyilván megfelelő háromszöget ad, és bármilyen adatok mellett egyértelműen elvégezhető.

Ha az adott  $\frac{b}{c}$  arány nem 1, akkor a háromszög  $A$  csúcsához tartozó külső szögfelező egy  $N$  pontban metszi a  $BC$  oldalt. A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{b}{c} = \frac{CM}{MB} = \frac{CN}{NB},$$

vagyis a  $BC = a$  távolság ismeretében az  $M$  és  $N$  pontokat – az arányosan osztó pont ismert szerkesztése alapján – meg tudjuk szerkeszteni. Tudjuk, hogy egy háromszög ugyanazon csúcsához tartozó külső és belső szögfelezők egymásra merőlegesek. Ezért az  $A$  pont rajta van az  $MN$  szakasz Thalesz-körén. Másrészt az  $A$  pont rajta van az  $M$  középpontú,  $MA$  sugarú körön is. Ezeket felhasználva a szerkesztés:

Felvesszük az adott  $BC$  oldalt. A  $BC$  egyenesen az arányosan osztó pont szerkesztésével megszerkesztjük az  $M$  és  $N$  pontokat. Az  $MN$  szakasz Thalesz-körének és az  $M$  középpontú  $MA$  sugarú körnek a metszéspontja adja a háromszög  $A$  csúcsát. Ez a szerkesztés megfelelő háromszöget ad, mivel az  $MN$  fölötti Thalesz-kör tetszőleges  $A$  pontjára az  $ABC$  háromszögnek  $AM$  (belső) szögfelezője. Ha a két kör metszi egymást, akkor a két metszéspont szimmetrikus a  $BC$  egyenesre, tehát ekkor a feladatnak lényegében egy megoldása van, míg ha a két kör érinti egymást, vagy nincs közös pontjuk, akkor nincs megoldása a feladatnak.

Ha a  $\frac{b}{c}$  arányt  $\lambda$ -val jelöljük, akkor könnyen kiszámolható, hogy  $MN = \frac{2\lambda a}{1 - \lambda^2}$ , tehát a feladatnak csak akkor van megoldása, ha  $MA < \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} \cdot a$ .

*Megjegyzés.* Az  $MN$  szakasz Thalesz-köre megegyezik azon  $P$  pontok halmazával, melyekre a  $\frac{PC}{PB}$  arány egyenlő az adott  $\frac{b}{c}$  aránnyal. Ezt a kört szokás az adott  $B$  és  $C$  pontokhoz, valamint  $\frac{b}{c}$  arányhoz tartozó Apollóniosz-körnek nevezni. (Lásd: Geometriai feladatok gyűjteménye, I. kötet 1395. feladat.)