

Legyen  $P$  a háromszög tetszőleges belső pontja! Jelöljük az  $APC$  háromszög területét  $T_B$ -vel, a  $BPC$  háromszög területét  $T_A$ -val, az  $APB$  háromszög területét pedig  $T_C$ -vel!

1986-09-262-1.eps

Bocsássunk merőlegeseket a  $P$  és a  $C$  pontokból az  $AB$  oldalra! Ezek talppontjai legyenek  $P^*$  és  $C^*$ .  
Megmutatjuk, hogy

$$(1) \quad \frac{CC_1}{PC_1} = \frac{CC^*}{PP^*}.$$

Ha a  $PC$  egyenes merőleges az  $AB$  egyenesre, akkor a  $C_1$ ,  $P^*$  és  $C^*$  pontok egybeesnek, és (1) nyilvánvaló. Ha ezek a pontok nem esnek egybe, akkor a  $PP^*$  és  $CC^*$  egyenesek párhuzamossága miatt a párhuzamos szelők tételéből következik (1).

Tehát

$$\frac{CC_1}{PC_1} = \frac{CC^*}{PC^*} = \frac{CC^* \cdot \frac{AB}{2}}{PP^* \cdot \frac{AB}{2}} = \frac{T_A + T_B + T_C}{T_C}.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{AA_1}{PA_1} = \frac{T_A + T_B + T_C}{T_A} \quad \text{és} \quad \frac{BB_1}{PB_1} = \frac{T_A + T_B + T_C}{T_B}.$$

Vagyis a háromszög tetszőleges  $P$  belső pontjára

$$\begin{aligned} \frac{AA_1}{PA_1} + \frac{BB_1}{PB_1} + \frac{CC_1}{PC_1} &= \frac{T_A + T_B + T_C}{T_A} + \frac{T_A + T_B + T_C}{T_B} + \frac{T_A + T_B + T_C}{T_C} = \\ &= 3 + \left( \frac{T_B}{T_A} + \frac{T_A}{T_B} \right) + \left( \frac{T_C}{T_A} + \frac{T_A}{T_C} \right) + \left( \frac{T_C}{T_B} + \frac{T_B}{T_C} \right) \geq 3 + 3 \cdot 2 = 9, \end{aligned}$$

mert egy pozitív számnak és a reciprokának az összege legalább 2.

Tehát a háromszög tetszőleges belső pontjára igaz az állítás.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha  $T_A = T_B = T_C$ , vagyis ha  $P$  a háromszög súlypontja.