

Két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy a két kör kívülről vagy belülről érinti egymást (lásd az ábrákat).

1986-05-212-4.eps

1/a ábra

1986-05-212-5.eps

1/b ábra

Mindkét esetben jelölje S a QR egyenes és a két kört a P pontban érintő egyenes metszéspontját, R' pedig a PR egyenes és az R pontot nem tartalmazó kör P -től különböző metszéspontját! Az R' pont nyilván mindig létrejön, az S pont viszont abban az esetben nem, ha a két kör belülről érinti egymást és EP – közös – átmérő (1 /a ábra). Ekkor az ábra az EP egyenesre szimmetrikus, és így az állítás igaz. Elegendő megmutatnunk, hogy a PE egyenes felezi a QPR' -et, mert ez pontosan azt jelenti, hogy E egyenlő távol van a PQ és PR egyenesektől.

Mindkét esetben igaz, hogy

$$\angle SPE = \angle SEP = \alpha,$$

mert azonos ívhez tartozó érintő szárú kerületi szögek, valamint

$$\angle PRQ = \angle QPS = \beta,$$

mert mindkettő a PQ ívhez tartozó kerületi szög.

Ha a két kör belülről érinti egy mást (1. ábra), akkor az EPR háromszögben felírva a szögek összegét:

$$\angle EPR' + \angle PER + \angle ERP = 180^\circ.$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \angle PER &= 180^\circ - \angle SEP \quad \text{és} \quad \angle ERP = \angle QRP; \\ \angle EPR' &= 180^\circ - \angle PER - \angle QRP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \beta = \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Másrészt nyilván

$$\angle EPQ = \angle SPE - \angle QPS = \alpha - \beta.$$

Tehát ebben az esetben a PE egyenes szögfelezője az RP és QP egyeneseknek.

1986-05-213-1.eps

2. ábra

Ha a két kör kívülről érinti egymást (2. ábra), akkor az EPR' az EPR háromszög P csúcsánál levő külső szöge, tehát:

$$\angle EPR' = \angle PRQ + \angle SEP = \beta + \alpha.$$

Másrészt nyilván

$$\angle EPQ = \angle SPE + \angle QPS = \alpha + \beta.$$

Tehát a PE egyenes ebben az esetben is szögfelező.

Ezzel az állítást mindkét esetben igazoltuk.

Megjegyzés. A beküldők nagy része csak azt az esetet vizsgálta, amikor a két kör kívülről érinti egymást. Ezek a dolgozatok nem kapták meg a teljes pontszámot.