

I. megoldás. Legyen a négyzet oldala a . Jelölje M_1 és M_2 a sík egy tetszőleges pontjából az AC , illetve a BD egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontját, m_1 és m_2 pedig az MM_1 , illetve az MM_2 távolságot!

1986-05-211-1.eps

1. ábra

Ekkor a feltételek szerint az M pontosan akkor tartozik a keresett halmazhoz, ha

$$\frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot m_1}{2} + \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot m_2}{2} = a^2,$$

vagyis

$$m_1 + m_2 = a \cdot \sqrt{2}.$$

Tehát a sík azon pontjait keressük, amelyeknek az AC és BD egyenesektől mért távolságaik összege $a \cdot \sqrt{2}$.

Az AC és BD egyenesek a síkot négy részre bontják; ezeket a részeket a két egyenes O metszéspontja körüli 90° -os forgatások egymásba viszik. Elegendő tehát a keresett halmaz pontjait az OB és OC félegyenesek által határolt síknegyedben meghatároznunk.

Legyen M ennek a síknegyednek egy tetszőleges pontja. Messe az M -en átmenő, BC -vel párhuzamos egyenes az OB és OC félegyeneseket a B_1 , illetve C_1 pontokban! Ekkor $MM_1 = M_1C_1$ és $MM_2 = M_1O$, tehát $m_1 + m_2 = OC_1$.

Az M pont tehát pontosan akkor tartozik a keresett halmazhoz, ha $OC_1 = a \cdot \sqrt{2}$. Ámde $OC = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$ miatt ez pontosan akkor igaz, ha M rajta van a BC szakasznak az O középpontból való, $2 : 1$ arányú nagyítással keletkező képén. Tehát figyelembe véve az O körüli 90° -os elforgatásokat, a keresett halmaz az $ABCD$ négyzet kerületének az O középpontból való $2 : 1$ arányú nagyításával keletkező négyzet kerülete.

Megjegyzés. Ha az M pont a nagyított négyzet valamelyik csúcsa, akkor az MAC és MBD háromszögek egyike elfajul, területe 0. Amennyiben ezt nem tekintjük háromszögnek, akkor a nagyított négyzet csúcsait a keresett halmazból ki kell zárni.

II. megoldás. Legyen M a sík egy tetszőleges pontja, és tükrözzük M -et a négyzet O középpontjára ($M \neq O$ nyilván föltehető). Ha M' jelöli a tükröképet, akkor az MM' egyenesnek a négyzet négy oldalszakasza közül két szembenlevőn biztosan van pontja. Legyen ez a két oldal az AB és a CD . Ez azt jelenti, hogy M a COD derékszög-tartományok valamelyikében van (a határoló egyeneseket is beleértve).

A következőkben az idomok szokásos, csúcsaik körüljárásával való leírását egyszersmind a területük jelölésére is használjuk. Nem lesz félreérthető, hogy adott esetben a jel melyik értelmére kell gondolnunk. A tükrözés miatt

$$MAC = MM'C \quad \text{és} \quad MBD = MM'D.$$

A COD szögtartományban levő M pontok tehát akkor és csak akkor tartoznak a keresett halmazhoz, ha az $MDM'C$ négyszög területe egyenlő a négyzet területével.

A keresett halmaznak így csak a négyzeten kívül lehetnek pontjai, hiszen belső vagy határpontokra az $MDM'C$ négyszög valódi része a négyzetnek (2/a ábra).

1986-05-212-1.eps

2/a ábra

1986-05-212-2.eps

2/b ábra

Ha M – és így M' is – külső pont, akkor a négyszög területe akkor és csak akkor lesz egyenlő a négyzet területével, ha M -nek és M' -nek a közös DC négyzetoldaltól mért távolságösszege – mint az MDC és az $M'DC$ háromszögek magasságainak összege – éppen a négyzet oldalának kétszerese (2/b ábra).

A szimmetria miatt e két magasság összege éppen az M -nek a DC -től (vagy AB -től) mért távolsága kétszeresével nagyobb a négyzet oldalánál. Így M akkor és csak akkor tartozik a keresett halmaz COD szögtartománybeli részéhez, ha a DC -től (vagy AB -től) mért távolsága a négyzet oldalának a felével egyenlő és M a négyzeten kívül helyezkedik el. Így éppen az első megoldásban kapott halmazt, pontosabban annak a COD szögtartományokba eső részét kapjuk (3. ábra). Maga a keresett halmaz úgy áll elő, ha a fenti gondolatmenetet a COB szögtartományra is elismételjük.

1986-05-212-3.eps

3. ábra