

Osszuk el az egyenlőség mindkét oldalát $(\sqrt{30} - \sqrt{18})$ -cal, majd gyöktelenítsük a kapott tört nevezőjét:

$$3\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{12}{\sqrt{30} - \sqrt{18}} = \frac{12(\sqrt{30} + \sqrt{18})}{30 - 18},$$

ahonnan

$$(2) \quad 3\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{30} + \sqrt{18} = 3\sqrt{2} + \sqrt{30}$$

adódik.

Belátjuk, hogy ha a és b pozitív egészek, akkor (2) csak úgy teljesülhet, ha a két oldalon szereplő összegek tagonként egyenlők, azaz $a = 2$ és $b = 30$. Emeljük négyzetre (2) mindkét oldalát. Mivel (2)-ben mindkét oldal pozitív, a kapott összefüggés ekvivalens az eredetivel.

$$9a + b + 6\sqrt{ab} = 48 + 6\sqrt{60},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$(3) \quad \frac{48 - (9a + b)}{6} = \sqrt{ab} - \sqrt{60}.$$

A feltétel szerint a bal oldalon egész számok hányadosa áll, így $\sqrt{ab} - \sqrt{60}$ racionális szám. Ha nem nulla, akkor

$$\frac{ab - 60}{\sqrt{ab} - \sqrt{60}} = \sqrt{ab} + \sqrt{60}$$

szintén racionális, és így $2\sqrt{60} = (\sqrt{ab} + \sqrt{60}) - (\sqrt{ab} - \sqrt{60})$ is az. Ez viszont nem igaz, hiszen ismeretes, hogy a pozitív egész számok közül pontosan a négyzetszámok négyzetgyökei racionálisak, a 60 pedig nem négyzetszám.

Azt kaptuk tehát, hogy $\sqrt{ab} - \sqrt{60} = 0$, ahonnan egyrészt

$$\begin{aligned} ab &= 60, \text{ másrészt (3) szerint} \\ 9a + b - 48 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásai $\left(\frac{10}{3}, 18\right)$ és $(2, 30)$. Mivel csak az utóbbi megoldás áll egész számokból, ezért valóban $a = 2$ és $b = 30$, ahogyan állítottuk.

Megjegyzés. A megoldás során hivatkoztunk arra, hogy ha egy m pozitív egész nem négyzetszám, akkor $\sqrt{m}$ irracionális. Ezt a $\sqrt{2}$ irracionális voltának ismert bizonyításához hasonló gondolatmenettel láthatjuk be.

Ha $\sqrt{m}$ racionális, akkor felírhatjuk relatív prím egész számok p/q hányadosaként. Négyzetre emelve és q^2 -tel szorozva kapjuk, hogy $p^2 = m \cdot q^2$. Innen egyrészt $m \mid p^2$, másrészt mivel a számelmélet alaptétele szerint p^2 -nek és q^2 -nek sincs l-nél nagyobb közös osztója, p^2 valamennyi prímtényezője m felbontásában szerepel, vagyis $p^2 \mid m$. A két oszthatóságot egybevetve valóban $m = p^2$, azaz m egy egész szám négyzete.

A fenti bizonyítás nyilván nemcsak négyzetgyökvonásra mondható el, általában is igaz tehát, hogy egy természetes szám n -edik gyöke vagy egész – és így maga a szám n -edik hatvány – vagy pedig irracionális.