I. megoldás. Az (a) és a (b) tulajdonság szerint $f(2n) = f(2) \cdot f(n) = 2 \cdot f(n)$, minden n pozitív egészre. Innen $n = 1$-re $f(2 \cdot 1) = 2 \cdot f(1)$, ahonnan f(2) =2 miatt $f(1) = 1$.

A kitevőre vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha n kettőhatvány, akkor $f(n) = n$. A fentiek szerint az állítás 0, illetve 1 kitevővel igaz. Tegyük fel, hogy k-nál kisebb kitevőjű kettőhatványokra igaz az állítás, ahol $k > 1$. Ekkor $f(2^k) = f(2 \cdot 2^{k-1}) = f(2) \cdot f(2^{k-1})$, ami az indukciós feltevés szerint $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, tehát az állítás k-ra is igaz.

Tekintsük most a 2 két szomszédos hatványát és a közéjük eső egészeket:

$$2^k < 2^k + 1 < 2^k + 2 < \ \dots \ < 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}.$$

A monotonitás miatt a megfelelő függvényértékekre teljesül, hogy
$(*)\quad 2^k = f(2^k) < f(2^k + 1) < f(2^k + 2) < \ \dots \ < f(2^{k+1} - 1) < f(2^{k+1}) = 2^{k+1}$. Az utóbbi egyenlőtlenségláncban $2^k - 1$ darab különböző egész számot soroltunk fel nagyság szerint növekvő sorrendben 2^k és 2^{k+1} között. Mivel pedig ilyen egész szám éppen $2^k - 1$ darab van, ez csak úgy lehetséges, ha a $(*)$ egyenlőtlenségben éppen a 2^k és a 2^{k+1} közé eső egészeket soroltuk fel, vagyis $f(2^k + j) = 2^k + j$, ha $1 \leqq j < 2^k$.

Abból, hogy a kapott eredmény minden pozitív egész k-ra igaz, a bizonyítandó állítást kapjuk.

II. megoldás. Ha beláttuk, hogy $f(2^k) = 2^k$, akkor másképpen is befejezhetjük a bizonyítást. A monotonitás miatt ugyanis $f(m+k) > f(m)$, azaz $f(m+1) \geqq f(m) + 1$. Innen egyrészt $f(m+k) \geqq f(m) + k$, másrészt $f(m) \geqq m$.

Megmutatjuk, hogy $f(n) > n$ semmilyen n-re nem igaz.

Tegyük föl ennek az ellenkezőjét. Ha $f(n) > n$ valamilyen n-re, akkor $n > 1$, és így $2^n > n$. Így

$$2^n = f(2^n) = f(n + 2^n - n) \geqq f(n) + 2^n - n > n + 2^n - n = 2^n,$$

ez pedig lehetetlen.

III. megoldás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. Az első megoldás szerint $f(1) = 1$. Legyen most $n > 1$, és tegyük fel, hogy n-nél kisebb számokra az állítás igaz.

Ha n páros, azaz $n = 2j$, akkor $j < n$ miatt $f(j) = j$, másrészt $f(n) = f(2j) = f(2) \cdot f(j) = 2 \cdot j = n$.

Ha n páratlan, azaz $n = 2j + 1$, akkor továbbra is $j < n$, és $n > 1$ miatt $j + 1 < n$ is igaz. Így

$$2j = f(2j) < f(2j+1) < f(2j+2) = f\big(2(j+1)\big) = 2f(j+1) = 2j + 2.$$

Azt kapjuk, hogy $2j < f(2j+1) < 2j + 2$, és mivel $f(2j+1)$ egész, $f(2j+1) = 2j + 1$ lehet csak. Az állítás tehát n-re is igaz.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.