

Jelöljük az ABC háromszög oldalait a szokott módon rendre a, b, c -vel! A C csúcsból induló szögfelező és az AB oldal metszéspontja legyen F , az FC szakasz hossza pedig f . Legyen a $BCF \sphericalangle = FCA \sphericalangle = \gamma$. A háromszög T területét a, b és f függvényében kell meghatároznunk.

1986-03-119-1.eps

Ismert, hogy minden háromszög területének kétszerese megegyezik a háromszög két oldalának és az általuk bezárt szög szinuszával a szorzatával. Mivel az ABC háromszög területe az ACF és FCB háromszögek területének összege, ezért a fentiek szerint

$$a \cdot b \cdot \sin 2\gamma = b \cdot f \cdot \sin \gamma + a \cdot f \cdot \sin \gamma = (a + b) \cdot f \cdot \sin \gamma.$$

A $\sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma$ azonosság szerint innen

$$2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma = (a + b) \cdot f \cdot \sin \gamma$$

adódik. Mivel 2γ egy háromszög szöge, ezért $\sin \gamma > 0$, tehát egyszerűsíthetünk vele.

$$2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma = (a + b) \cdot f, \quad \text{azaz} \quad \cos \gamma = \frac{(a + b) \cdot f}{2ab}.$$

$\sin \gamma > 0$ miatt $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$. Ha itt $\cos \gamma$ helyére beírjuk a kapott kifejezést, akkor kapjuk, hogy

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \frac{(a + b)^2 f^2}{4a^2 b^2}}.$$

Vagyis az ABC háromszög területe

$$\begin{aligned} T &= \frac{a \cdot b \cdot \sin 2\gamma}{2} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \cos \gamma}{2} = \\ &= \frac{(a + b)f}{4ab} \sqrt{4a^2 b^2 - (a + b)^2 f^2}. \end{aligned}$$

Ez a képlet pedig éppen a kívánt adatokkal fejezi ki a háromszög területét.