

Tudjuk, hogy egy tízsög átlóinak száma $10 \cdot 7/2 = 35$. Jelöljük az átlók hosszának összegét A -val, a tízsög kerületét K -val!

1986-03-118-1.eps

A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy egy konvex négyszög átlói hosszának összege nagyobb, mint két szemben fekvő oldala hosszának összege. Tekintsünk a tízsögben két nem szomszédos oldalt! Ezek végpontjai a 10-szög konvex volta miatt egy konvex négyszöget határoznak meg. A fentiek szerint tehát a 10-szög két kiszemelt oldala hosszának összege kisebb, mint a végpontjaikat összekötő, metsző átlók hosszának összege. Az ábra jelöléseit használva

$$(1) \quad a + b < x + y.$$

Vegyük számba a nem szomszédos oldalpárokat! A tízsög minden oldalához 7, vele nem szomszédosat találhatunk. Minden pár két oldalból áll, így minden párt kétszer számoltunk, ezért $10 \cdot 7/2 = 35$. különböző oldalpár van. Írjuk fel minden oldalpár esetén az (1)-nek megfelelő egyenlőtlenségeket, majd adjuk ezeket össze! Ekkor a bal oldali összegben a tízsög minden oldalhossza kétszer szerepel, mert minden oldal hét oldalpárban fordul elő. A jobb oldali összegben minden átló kétszer szerepel, mert minden átlót két oldalpárnál vettünk számításba. (Az ábrán látható AE átlót pl. az AB és EF , valamint az AJ és ED oldalpárnál.) Tehát

$$7K < 2A \quad \text{azaz} \quad \frac{K}{10} < \frac{A}{35}.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

1986-03-118-2.eps

Megjegyzés. Az állítás tetszőleges, legalább négyoldalú konvex sokszögben igaz, a fenti bizonyítás általában is elismételhető. Konkáv sokszögre az állítás általában nem igaz. $n = 4$ -re például az ABC szabályos háromszög csúcsait és S súlypontját tekintve, az $ASBC$ konkáv négyszögben éppen egyenlő a két szóban forgó mennyiség, ha pedig S' az SC szakasz belső pontja, akkor az $AS'BC$ négyszögben az átlók számtani közepe már kisebb az oldalak számtani közepénél.