

I. megoldás. Az egyenlet bal oldalán felismerhető $(x - y)$ négyzete. Így kapjuk, hogy

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y^3 = (x - y)^2 + y^2(1 - 4y) = 0,$$

vagy rendezés után

$$(1) \quad (x - y)^2 = y^2(4y - 1).$$

Ha $y = 0$, akkor (1) jobb oldalán nulla áll, így $x = 0$. Megmutatjuk, hogy az egyenletnek nincs más megoldása.

Ha $y \neq 0$, akkor mivel y egész szám, $4y - 1$ sem nulla, így (1) szerint a jobb oldalon álló szorzat, $y^2(4y - 1)$ egy egész szám négyzete és nem nulla. A szorzat egyik tényezője, y^2 maga is négyzetszám, a szorzat tehát csak úgy lehet négyzetszám, ha a második tényező, $4y - 1 = 4(y - 1) + 3$ is az. Ez viszont lehetetlen, hiszen a négyzetszámok 0 vagy 1 maradékot adnak 4-gyel osztva.

Az egyenlet egyetlen megoldása tehát $x = y = 0$.

II. megoldás. Az egyenletből kapjuk, hogy

$$(2.a) \quad x^2 = 2xy - 2y^2 + 4y^3, \text{ másrészt}$$

$$(2.b) \quad 2y^2 = 2xy - x^2 + 4y^3.$$

(2. a)-ból látszik, hogy x páros, így (2. b) jobb oldalán 4-gyel osztható szám áll. Így y^2 is páros, és ezért 4-gyel is osztható. Ismét (2. a)-ból ezután már $8|x^2$ következik, ami csak úgy lehet, ha $4|x$. A gondolatmenet folytatható, és kapjuk, hogy mind x , mind pedig y osztható a 2 tetszőleges pozitív egész kitevőjű hatványával, ami csak úgy lehet, ha x és y is nulla.

A fenti okoskodás csupán vázlat. A mondott "folytathatóságot" egy valódi bizonyításban nem csak jelezni kell, hisz ez a megoldás kulcsa. Igazolása teljes indukcióval történhet; ezt most nem részletezzük, helyett egy – látszólag – másik utat választunk.

Ha x és y valamelyike nem nulla, akkor jelölje d azt a *legnagyobb* kitevőt, amelyre 2^d -nel mind x , mind pedig y osztható. Ekkor (2. a) szerint x^2 osztható 2^{2d+1} -nel, és mivel négyzetszám felbontásában minden prímszám páros kitevőn fordul elő, x^2 osztható 2^{2d+2} -nal is, x tehát osztható 2^{d+1} -nel.

Ezt fölhasználva (2. b)-ből kapjuk, hogy $2y^2$ osztható 2^{2d+2} -nal, azaz y^2 osztható 2^{2d+1} -nel. Ez viszont ellentmondás, hisz feltevésünk szerint 2^d volt a *legnagyobb* olyan 2-hatvány, amellyel x és y is osztható.

A talált ellentmondásból következik, hogy x és y közül egyik sem lehet nullától különböző. A $(0, 0)$ számpár láthatóan megoldás, így a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldás felhasználta azt a számelmélet alaptételének nevezett állítást, amely szerint a pozitív egész számok egyértelműen írhatók fel prímszámok szorzataként.

2. A második megoldásban azt láttuk be, hogy ha x és y oszthatók 2^d -nel, akkor 2^{d+1} -nel is oszthatók. Mivel pedig $2^0 = 1$ -gyel minden egész szám osztható, ez valójában éppen az említett teljes indukciós bizonyítás.