

A megoldás kulcsa az az észrevétel, hogy ha három adott város között fellépő három távolság közül kettőt ismerünk, akkor a harmadikat már ki tudjuk számolni. A városok ugyanis egy egyenes mentén helyezkednek el, így ez a harmadik távolság aszerint lesz a két ismert távolság összege vagy pedig a különbsége, hogy az a város, amelynek a másik kettőtől mért távolságát ismerjük, elválasztja-e a másik kettőt, vagy sem. Ezt felhasználva a megoldók módszeresen töltögették ki a hiányos táblázatot, míg végül valamennyi hiányzó értékre rátaláltak. Az alábbiakból kiderül, hogy ez miért sikerülhetett.

Áttekinthetőbb lesz a kép, ha az egyes városokat egy nyolcoldalú sokszög csúcsaiként ábrázoljuk és éllel kötjük össze azokat a csúcsokat, amelyeknek ismerjük a távolságát (1. ábra). Így egy úgynevezett gráfot kapunk.

1986-03-114-2.eps

1. ábra

Az ábrából látható, hogy a hét ismert útszakasz mentén a B városból indulva a $BEHCFADG$ útvonalon eljuthatunk a G városig úgy, hogy minden várost pontosan egyszer ejtünk útba. Igaz az is – és ez a lényeg –, hogy bármely két város között létezik ismert hosszúságú szakaszokból álló útvonal, mégpedig csak egy. Kiszemelve most már egyet a városok közül – legyen ez például az A –, a további városok A -tól mért távolsága az A -ból hozzájuk vezető útvonal mentén haladva határozható meg az adott és az útközből megismert távolságok alapján a bevezetőben említettek szerint. Az A város esetében ez az ADG , illetve az $AFCHEB$ útvonalak bejárását jelenti,

Az ADG útvonal mentén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AD &= 28 && \text{adott, és} \\ AG &= AD + DG = 28 + 22 = 50, \end{aligned}$$

az $AFCHEB$ útvonalon pedig

$$\begin{aligned} AF &= 43 && \text{adott} \\ AC &= AF - FC = 43 - 25 = 18, \\ AH &= AC + CH = 18 + 38 = 56, \\ AE &= AH - HE = 56 - 24 = 32, && \text{végül} \\ AB &= AE - EB = 32 - 27 = 5. \end{aligned}$$

1986-03-114-3.eps

2. ábra

Miután pedig ismerjük egy városnak az összes többitől mért távolságát, bármely két város távolsága meghatározható. A teljesen kitöltött táblázatot a 2. ábra mutatja. A szomszédos városok közti távolságok: $AB = 5$, $BC = AC - AB = 13$, $CD = AD - AC = 10$, $DE = AE - AD = 4$, $EF = AF - AE = 11$, $FG = AG - AF = 7$, $GH = AH - AG = 6$.

Megjegyzés. Látható, hogy feladatunk az ismertnek adott távolságok bármely értéke mellett egyértelműen megoldható. Ez nyilván általában is igaz, ha az 1. ábra mintájára elkészített gráf összefüggő – azaz bármely két pontja között vezet út és a gráf ún. „fa” is – azaz bármely két pontja között csak egy út vezet. Nem összefüggő gráfra a feladat nem oldható meg, ha pedig vannak olyan városok, amelyek között több út is vezet, akkor az ezek szakaszaira vonatkozó feltételek nem függetlenek, a feladatnak így nincs mindig megoldása.

Mivel egy n pontú fának $n - 1$ éle van, általában az mondhatjuk, hogy az összes távolságok meghatározásához $n - 1$ távolság megadása szükséges és ennyi elegendő is, ha az ismert hosszúságú szakaszok egy fa éleit alkotják.