

Jelöljük a metsző síkot S -sel. A síkmetszet konvex síkidom, és pedig sokszög, szakasz vagy egyetlen pont. Ha sokszög, akkor csúcsai S -nek és az oktaéder élének a metszéspontjai; illetve ha S tartalmazza az oktaéder egy e élét, akkor az él két végpontja lesz csúcsa a sokszögnek.

Vizsgáljuk először az utóbbi esetet! Ha S -nek van pontja az oktaéder e -vel párhuzamos e' élén is, akkor S nem más, mint az oktaéder e -n átmenő szimmetriasíkja, ekkor pedig négyzet a síkmetszet. Ha pedig nincs ilyen pont, akkor S legfeljebb két pontban metszheti annak a térbeli négyszögnek a kerületét, amely az oktaéder e -hez képest kitérő négy éléből áll (1. ábra). A síkmetszet ekkor legfeljebb négyszög, hisz az e -vel szomszédos éleken S -nek nem lehet belső pontja.

1986-01-024-1.eps

1. ábra

Ha S nem tartalmaz egyetlen élt sem, akkor bontsuk az $ABCDEF$ oktaéder élvázát három, közös él nélküli négyzetre : ezek az $ABCD$, az $AECF$ és a $BEDF$ (2. ábra). Mivel S nem tartalmaz élt, bármely négyzet kerületét legfeljebb két pontban metszheti, így magának az oktaédernek az élvázát legfeljebb hat pontban. Ez azt jelenti, hogy a síkmetszet legfeljebb hatoldalú.

1986-01-024-2.eps

2. ábra

Megjegyzés. Látható, hogy a síkmetszet lehet három-, négy-, öt-, illetve hatoldalú sokszög, szakasz vagy pedig pont. Az állítás úgy is igaz, ha az oktaéder nem szabályos ugyan, de az $ABCD$, $AECF$ és $BEDF$ négyszögek síknégyszögek (és mind a 8 lapja háromszög alakú). Ha valamelyikük nem az, akkor lehetséges nyolcoldalú síkmetszet is (3. ábra).

1986-01-024-3.eps

3. ábra