

I. Megoldás. Legyen $A = 10a + b$ legalább kétjegyű szám, azaz $0 \leq b \leq 9$ és $a > 0$. Ha A -ból kivonjuk a jegyeinek az összegét, akkor a kapott $A' = 10a' + b'$ számban egyrészt $a' < a$, másrészt A' nem negatív.

Ez azt jelenti, hogy az eljárás egy lépése után kapott A' számban a' legalább 1-gyel kisebb, mint A -ban az a . Mivel kezdetben háromjegyű számunkra a legfeljebb 99, így eljárásunk legfeljebb 99 lépés után egyjegyű számhoz vezet, a következő lépésben pedig ebből nulla lesz. Ha még nem tartanánk a századik lépésnél, akkor ezután már minden további lépésben nulla lesz az eredmény.

II. megoldás. Ha a háromjegyű \overline{abc} számból kivonjuk a jegyeinek az összegét, $(a + b + c)$ -t, akkor eredményül

$$(1) \quad 100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)\text{-t,}$$

tehát 9-cel osztható számot kapunk. Így az első lépés után kapott szám osztható 9-cel, értéke pedig legfeljebb $9(11 \cdot 9 + 9) = 972$.

Elegendő most már azt igazolnunk, hogy egy 972-nél nem nagyobb, 9-cel osztható számból kiindulva, a 99. lépésben 0-t kapunk eredményül. Mivel $\overline{abc} > 0$ esetén $\overline{abc} - (a + b + c) \geq 0$, így minden lépésben vagy a korábbinál kisebb pozitív számot kapunk, vagy pedig 0-t.

Mivel 9-cel osztható szám jegyeinek összege is osztható 9-cel, az első lépés után a szóban forgó szám mindig a 9 többszörösével csökken (9-cel vagy 18-cal), így továbbra is osztható marad 9-cel.

Ha most A jelöli az első lépés után kapott számot és $A \leq 99 \cdot 9 = 891$, akkor legfeljebb 99 lépésben valóban eljutunk a 0-hoz.

Ha $A \geq 900$, akkor legfeljebb négy lépésben – ugyanis 99-nél nagyobb számokra lépésenként 18-at vonunk le – 900, vagy pedig 909 adódik, a következő lépésben pedig 891. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy 891-re 94-szer alkalmazva eljárásunkat, eljutunk a nulláig.

A $891 \rightarrow 873 \rightarrow 855 \rightarrow 837 \rightarrow 819 \rightarrow 801$ sorozat mutatja, hogy további 5 lépés után a 801-hez jutunk, ahonnan pedig legfeljebb $\frac{891}{9} = 89$ lépéssel valóban elérjük a 0-t.

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. A második megoldásból kiderül, hogy az első lépés után a szám lépésenként 9-cel vagy 18-cal csökken, így várhatóan már 100-nál kevesebb lépésben is elérjük a nullát. Valóban megmutatható, hogy ehhez már 80 lépés is elegendő.