

I. megoldás. Legyen az AM egyenesnek a k_2 körrel alkotott másik metszéspontja D . (A D pont mindig létrejön, mert ha az AM egyenes érintené a k_2 kört, akkor az M pontot a k_2 kör O_2 középpontjával összekötő egyenes merőleges volna az AM egyenesre, vagyis az ABO_2M négyszög húrnégyszög lenne, tehát az O_2 pont rajta lenne a k_1 körvonalon. Ez viszont nyilván nem lehet. – Az ábrán D pótlendő.)

1986-04-169-1.eps

$\angle MAB = \angle MBC$, mint a k_1 kör MB ívéhez tartozó kerületi, illetve érintő szárú kerületi szög. $\angle MBC = \angle MDC$, mert mindkettő a k_2 kör MC ívéhez tartozó kerületi szög. Tehát

$$\angle DAB = \angle MAB = \angle MDC = \angle ADC,$$

és így az AB egyenes párhuzamos a CD egyenessel.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\angle CAD = \angle CAM = \angle ABM = \angle BDM = \angle BDA.$$

Ezért az AC egyenes párhuzamos a BD egyenessel.

Így az $ABDC$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, tehát az AM egyenes valóban áthalad a BC szakasz felezőpontján.

II. megoldás. Legyen $\angle ABM = \alpha$, $\angle MAB = \beta$. Legyen az F pont az AM egyenesnek a BC egyenessel alkotott metszéspontja. A kerületi szögek tételének többszöri felhasználásával kapjuk, hogy

$$\angle MAC = \alpha, \quad \angle MCB = \alpha, \quad \angle MBC = \alpha.$$

Ennek alapján a BFM és AFB háromszögek, továbbá a CFM és AFC háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlőek. Ekkor viszont a megfelelő oldalak arányai is egyenlőek, azaz

$$(1) \quad \frac{BF}{FM} = \frac{AF}{FB}, \quad \text{ebből: } (BF)^2 = AF \cdot FM, \quad \text{illetve}$$

$$(2) \quad \frac{CF}{FM} = \frac{AF}{FC}, \quad \text{azaz } (CF)^2 = AF \cdot FM.$$

(1) és (2) egybevetéséből kapjuk, hogy $BF = CF$, vagyis az F pont valóban felezi a BC szakaszt.

Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.