

Ha  $m$  nem négyzetszám, akkor legyen  $d^2 < m < (d+1)^2$ . Ekkor  $m = d^2 + k$ , ahol  $0 < k < 2d+1$ . Így  $\lfloor \sqrt{m} \rfloor = d$ , vagyis  $f(m) = d^2 + k + d$ .  $f(f(m))$  értéke attól függ, hogy  $f(m)$  túllépi-e a következő négyzetszámot,  $(d+1)^2$ -t. Ha még  $k + d < 2d+1$ , azaz  $k < d+1$ , akkor  $\lfloor \sqrt{f(m)} \rfloor$  még mindig  $d$ , így  $f(f(m)) = d^2 + k + 2d = (d+1)^2 + (k-1)$ .

Ha tehát  $m$  és a nála kisebb legnagyobb négyzetszám eltérése nem nagyobb, mint  $\lfloor \sqrt{m} \rfloor$ , akkor  $f(f(m))$  esetén ugyanez az eltérés eggyel csökken. Ez azt jelenti, hogy gondolatmenetünk  $f(f(m))$ -ből indulva ismételhető, vagyis az említett eltérés minden második  $f$  értékre egyesével csökken. Előbb-utóbb tehát nullává válik, azaz a sorozat megfelelő eleme négyzetszám.

Esetünkben  $m = 1111 = 33^2 + 22$ , vagyis teljesül, hogy

$$(1) \quad m - \lfloor \sqrt{m} \rfloor^2 \leq \lfloor \sqrt{m} \rfloor.$$

A fentiek szerint tehát a sorozat 45-ödik tagja négyzetszám, értéke  $(33+22)^2 = 3025$ .

*Megjegyzés.* A feladat állítása bármely pozitív valós  $m$  számra igaz, ami azt is jelenti, hogy az adott sorozat elemei között végtelen sok négyzetszám található.

Ha ugyanis  $m$  négyzetszám, vagy teljesül rá (1), akkor a megoldás szerint készen vagyunk. Ha nem, akkor a megoldás jelöléseivel  $m = d^2 + k$  és  $d+1 \leq k < 2d+1$ . Ekkor

$$f(m) = d^2 + k + d = (d+1)^2 + k - d - 1.$$

Mivel  $0 \leq f(m) - \lfloor \sqrt{f(m)} \rfloor^2 = k - d - 1 < d < \lfloor \sqrt{f(m)} \rfloor$ , azért  $f(m)$ -re teljesül (1), megoldásunk tehát  $m$  helyett  $f(m)$ -ből indulva továbbra is megismételhető.