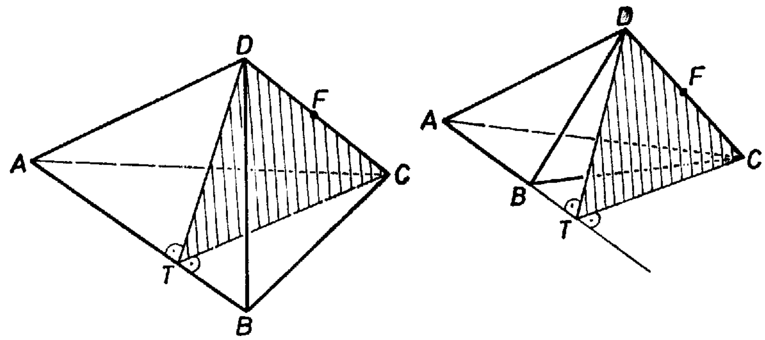
A feladat állítása általában nem igaz! Az alábbi „bizonyítási kísérlet” során kiderül, hogy milyen kiegészítő feltételre van szükség, illetve ennek hiányában hogyan készíthető ellenpélda.

Az ABF sík pontosan akkor merőleges CD-re, ha A és B illeszkednek a CD felező merőleges síkjára, ami pedig akkor és csak akkor igaz, ha az ABC és az ABD háromszögek tükrös helyzetűek erre a síkra nézve.

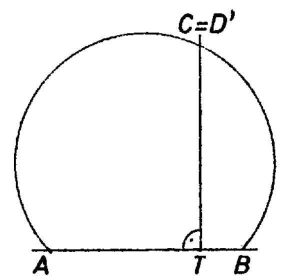
A feltétel szerint a két háromszögben egyenlő a közös AB éllel szemközti szög. Mivel CD merőleges AB-re, ezért létezik a CD-n átmenő AB-re merőleges S sík (1. ábra). Ha tehát az ABD háromszöget AB körül forgatjuk, a D csúcs ebben a síkban mozog.



1. ábra

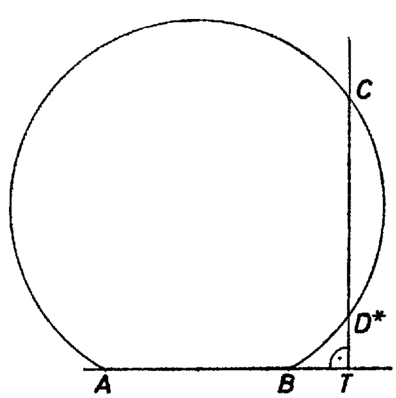
Forgassuk el az ABD háromszöget az AB egyenes körül az ABC háromszög síkjába úgy, hogy a D pont D' elforgatottja és C az AB-nek ugyanarra a partjára essék! A bizonyítandó állítás pontosan akkor igaz, ha D' és C egybeesnek.

A megadott szögek egyenlőségéből következik, hogy D'-ből és C-ből egyenlő szögben látszik az AB szakasz, a két pont tehát rajta van az AB végpontú, ACB szögű látóköríven. Mivel pedig mindkét pont illeszkedik az S síkra, C-vel együtt D' is rajta van S és az ABC sík metszésvonalán, pontosabban a TC félegyenesen, ahol T az S és az AB metszéspontja.



2. ábra

Mármost ha ez az AB-re merőleges félegyenes csak egy pontban metszi a szóban forgó látókörívet, akkor D' valóban azonos C-vel és így a feladat állítása is igaz (2. ábra). Ha azonban T nincs az AB szakaszon, vagyis az ABC háromszögben az A vagy a B csúcsnál tompaszög van, akkor a félegyenesnek két pontja is lehet a köríven (3. ábra). Ebben az esetben pedig példát készíthetünk az eredeti állítás cáfolatához is.

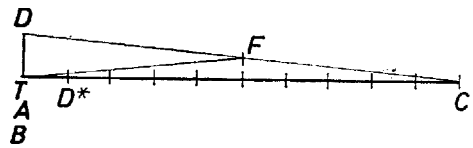


3. ábra

A 3. ábrán $ACB\sphericalangle = AD^*B\sphericalangle$, hiszen $ABCD^*$ húrnégyszög. Mivel pedig D^*C merőleges az AB-re, az AB körül tetszőleges szöggel elforgatott ABD^* háromszög D csúcsa mindig benne lesz az AB-re merőleges, AB-t CT-ben metsző S síkban. Az így kapott $ABCD$ tetraéderben tehát teljesülnek a feltételek, a bizonyítandó állítás azonban nem igaz, mert az ABC és az ABD háromszögek nem egybevágók.

A fentiekből kiolvasható, hogy a megadott feltételek mellett a bizonyítandó állítás pontosan akkor teljesül, ha a tetraédernek az AB élre illeszkedő lapjain az A és a B csúcsoknál nincs tompaszög.

Megjegyzések. 1. Az állítás általános érvényét egyetlen ellenpélda megdöntheti.



4. ábra

Tekintsük a következő példát (4. ábra). Ha DAB tompaszög (és akkor CAB is), előfordulhat, hogy $TC = 10 \cdot TD^*$. Állítsuk meg az ABD^* háromszög forgatását abban a helyzetben, amikor TD merőleges az ABC síkra, és szemléljük az alakzatot az S síkra merőleges irányból. Ekkor a kérdéses síkot a TF egyenesben (élben) látjuk. DFT szög pedig a sík TF egyenesének CD-vet bezárt szöge, valódi nagyságban.

Erre az esetre nyilvánvalónak mondható, hogy a DFT szög nem derékszög. Márpedig a CD egyenes akkor és csak akkor merőleges az ABF síkra, ha annak minden egyenesére merőleges.

2. Tulajdonképpen a következőket használtuk fel. Keresve azon P pontok halmazát, amelyekből egy adott AB szakasz látószöge egy adott γ szög, a válasz – fokozatokban – a következő:

a) az AB-n átmenő bármely síkban, az AB egyenes előírt partján: a hagyományos, jól meghatározott körív;

b) a síkban, az AB egyenes mindkét partján az AB-re tükrös körívpár; amely $\gamma = 90°$ esetén a Thalész-körré áll össze;

c) a térben az első körív által leírt forgásfelület, ha azt AB mint tengely körül forgatjuk (tórusz, $\gamma = 90°$ esetén gömb, $\gamma > 90°$ esetében olyan, mint egy „szilvamag”, $\gamma > 90°$ mellett a tórusznak van két olyasmi „gödröcskéje”, mint az almacsutka környezete).