

I. megoldás. Mindkét oldalon 4-gyel szorozva, rendezés után a bizonyítandóval ekvivalens

$$(1) \quad 2a^2 + 4ab + 2b^2 + a + b - 4a\sqrt{b} - 4b\sqrt{a} \geq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

A bal oldalon $4ab = -4ab + 4ab + 4ab$ felbontás után különbségek négyzetét, pontosabban ilyenek számszorosságait ismerhetjük fel. Valóban :

$$\begin{aligned} 2a^2 - 4ab + 2b^2 + a(1 - 4\sqrt{b} + 4b) + b(1 - 4\sqrt{a} + 4a) = \\ = 2(a - b)^2 + a(1 - 2\sqrt{b})^2 + b(1 - 2\sqrt{a})^2. \end{aligned}$$

A feltétel szerint sem a , sem pedig b nem negatív, így (1) bal oldalán nem negatív mennyiségek összege áll. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. A szóban forgó egyenlőtlenség mindkét oldala szorzattá alakítható, így

$$(2) \quad \left[\frac{1}{2}(a + b) \right] \left(\frac{1}{2} + a + b \right) \geq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

adódik.

A feltétel szerint a tényezők egyike sem negatív, így elegendő megmutatni, hogy a bal oldal „tényezőnként nagyobb” a jobb oldalnál.

Az első tényezők között fennálló

$$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$$

egyenlőtlenség a számtani és mértani közép közti ismert egyenlőtlenség két tagra (a és b nem negatív). Be kell még látnunk, hogy a második tényezők között is hasonló irányú egyenlőtlenség áll fenn, azaz

$$\frac{1}{2} + a + b \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Ez például az első megoldás módszerével igazolható. Rendezés után

$$\left(\frac{1}{2} + a + b \right) - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{1}{4} + a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} + b - \sqrt{b} = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{b} \right)^2,$$

ami nem lehet negatív.

Megjegyzés. Mindkét megoldásból leolvasható, hogy egyenlőség csak az $a = b = \frac{1}{4}$ és az $a = b = 0$ esetekben áll fenn.