

Jelöljük a körülírt kör középpontját  $O$ -val, a magasságpontot  $M$ -mel. Betűzzük a háromszöget úgy, hogy  $a \geq b$  legyen, ekkor  $a - b \geq 0$ .

Ha  $a - b = 0$ , akkor a háromszög egyenlő szárú,  $O$  és  $M$  rajta van az alaphoz tartozó magasságvonalon, ami egyben  $f_c$  szögfelező is. A feladat feltételeit tehát bármely, az  $r$  sugarú körbe írt egyenlő szárú háromszög kielégíti.

Ha  $a - b > 0$ , akkor  $M$ ,  $O$  és  $f_c$  helyzete függ attól, hogy a  $C$  szög hegyesszög vagy tompaszög (2. ábra).

1985-11-389-1.eps

1. ábra

1985-11-389-2.eps

2. ábra

Tudjuk, hogy  $f_c$  és az  $AB$  oldal felező merőlegese a körülírt kört ugyanabban a  $G$  pontban metszi. Jelöljük  $M$ -ből és  $O$ -ból az  $f_c$ -re bocsátott merőlegesek talppontját  $X$ -szel,  $Y$ -nal. A feltétel szerint  $MX = OY$ . Mivel  $MC \perp AB$ , és  $OG \perp AB$  azért  $MCX \sphericalangle = OGY \sphericalangle$ , azaz  $CXM$  és  $GYO$  háromszögek egybevágók, ezért  $MC = OG = r$ .

Továbbá azt is tudjuk, hogy a magasságpont 2-szer olyan messzire van a háromszög csúcsától, mint a körülírt kör középpontja a csúccsal szemközi oldal felezőpontjától, tehát  $r = MC = 2 \cdot OF$ , ahonnan  $OF = \frac{r}{2}$ . Az  $AOF$  derékszögű háromszögben a befogó fele az átfogónak, amiből következik, hogy  $AOF \sphericalangle = 60^\circ$ , és ezért  $AOB \sphericalangle = 120^\circ$ . A keresett háromszög  $C$  csúcsánál levő szöge tehát vagy  $60^\circ$  vagy  $120^\circ$  aszerint, hogy  $C$  az  $AB$  húr  $O$ -t tartalmazó vagy  $O$ -t nem tartalmazó oldalára esik. Az első esetben  $AB$  az  $OG$  sugar felező merőlegese, a másodikban ennek tükörképe az  $O$  középpontra.

Jelölje  $T$  a  $CB$  oldalon azt a pontot, amelyre  $BT = a - b$ . Ha  $C \sphericalangle = 60^\circ$ , akkor  $ACT$  szabályos háromszög, tehát  $ATB \sphericalangle = 120^\circ$ , azaz  $T$  az  $AB$  fölé írt,  $O$ -t tartalmazó  $120^\circ$ -os látóköri van. Ha viszont  $C \sphericalangle = 120^\circ$ , akkor  $ATB \sphericalangle = 150^\circ$ , és  $C$  az  $AB$  húrnak az  $O$ -t nem tartalmazó partján van.

Ezek ismeretében könnyen meg tudjuk szerkeszteni a keresett háromszöget. Az  $r$  sugarú kör tetszőleges  $OG$  sugarának felező merőlegese, illetve annak  $O$ -ra vonatkozó tükörképe kimetszi a körből az  $AB$  oldalt.

$AB$  fölé  $120^\circ$ , ill.  $150^\circ$ -os látóköri szerkesztünk az előbb mondottak szerint, a  $G$ -t nem tartalmazó partjukon. (Mindkettőnek  $G$  a középpontja.) A köríveket  $B$ -ből az adott  $a - b$  távolsággal elmetszve kapjuk a  $T$  pontot, és  $BT$  kimetszi a körből a háromszög  $C$  csúcsát. Az eddigi megfontolásainkat megfordítva következik, hogy az így kapott háromszögek eleget tesznek a feltételeknek.

1985-11-390-1.eps

3. ábra

A feladatnak akkor van megoldása, ha  $a - b$  sugarú körív metszi a látóköri, azaz  $0 < a - b < \sqrt{3}r$ , és ekkor (egybevágóság erejéig) 2 különböző megoldást kapunk.

*Megjegyzés.* A 4 pontos dolgozatok szerzői csak azt a háromszöget találták meg, amelyben  $C \sphericalangle = 60^\circ$ .