

**I. megoldás.** Jelöljük a háromszög csúcsait  $A$ ,  $B$  és  $C$ -vel, a súlypontot  $S$ -sel!

1986-04-165-1.eps

1. ábra

Tekintsük az  $S$ -en átmenő,  $BC$ -vel párhuzamos egyenest! Metszéspontját az  $AB$  és  $AC$  oldallal jelöljük  $B'$ , ill.  $C'$ -vel. Így az  $ABC$  háromszöget felosztottuk az  $AB'C'$  háromszögre és a  $BB'C'C$  négyszögre. Mivel a  $BC$  egyenes párhuzamos a  $B'C'$  egyenessel, ezért az  $ABC$  háromszög hasonló az  $AB'C'$  háromszöghöz, és  $A'B' = \frac{2}{3}AB$  miatt az  $AB'C'$  háromszög területe az  $ABC$  háromszög területének  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ -szerese. Ezért az  $AB'C'$  háromszög és a  $BB'C'C$  négyszög területének aránya

$$\frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}.$$

Nilván akkor is ennyi lesz a területek aránya, ha  $e$   $AB$ -vel vagy  $AC$ -vel párhuzamos.

Tudjuk azt is, hogy ha  $e$  átmegy a háromszög valamelyik csúcsán, akkor a két rész területe egyenlő.

Ezekből, és az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  csúcsok szerepének szimmetrikus voltából következik, hogy elegendő a kérdést abban az esetben megvizsgálnunk, amikor  $e$ -nek az  $AB$  ill.  $AC$  oldallal alkotott  $B_1$ , ill.  $C_1$  metszéspontja a  $B'B$  ill.  $C'A$  szakasz belső pontja (1. ábra).

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egységet úgy választottuk meg, hogy az  $ABC$  háromszög területe 1.

$B'$  a  $B_1A$  szakasz belső pontja, ezért  $B_1$  távolabb van  $AS$ -től, mint  $B'$ , és hasonlóan,  $C_1$  közelebb van  $AS$ -hez, mint  $C'$ . Ezekből és abból, hogy  $B'S = SC'$ , következik, hogy  $B_1S > SC_1$ .

A  $B_1B'S$  és a  $C_1C'S$  háromszögekben  $B'S = SC'$ , továbbá  $B'SB_1 < C'SC_1$ , és mivel  $B_1S > SC_1$ , a  $B_1B'S$  háromszög területe nagyobb a  $C_1C'S$  háromszög területénél. Ez azt jelenti, hogy

$$T_{AB_1C_1} > T_{AB'C'} = \frac{4}{9}.$$

Az ábráról viszont az is leolvasható, hogy

$$T_{AB_1C_1} < T_{AB'C'} + T_{BB'S}.$$

Mivel  $T_{SAB} = \frac{1}{3}$ , és  $B'$  harmadolja  $AB$ -t,

$$T_{BB'S} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Ennélfogva:

$$T_{AB_1C_1} < \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\frac{4}{9} < T_{AB_1C_1} < \frac{5}{9},$$

vagyis az  $e$  egyenes a háromszöget mindig két olyan részre vágja, amelyek területének aránya nem nagyobb  $\frac{5}{4}$ -nél és nem kisebb  $\frac{4}{5}$ -nél. Egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha az  $e$  egyenes párhuzamos a háromszög valamelyik oldalával.

**II. megoldás.** Harmadoljuk az  $ABC$  háromszög oldalait, majd az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel kössük össze a megfelelő harmadolópontokat (2. ábra). Így 9 egybevágó kis háromszögre osztottuk az  $ABC$  háromszöget. Ha a súlyponton áthaladó  $e$  egyenes párhuzamos a háromszög valamelyik oldalával, akkor egyik partján 4, a másikon pedig 5 kis háromszög található, a részek aránya így  $4/5$ .

1986-04-165-2.eps

2. ábra

Ha  $e$  nem párhuzamos az  $ABC$  háromszög egyik oldalával sem, akkor pontosan 3 db kis háromszögbe metsz bele, továbbá mindkét partján 3–3 db teljes kis háromszög található. Az a két kettévágott kis háromszög, amelyik közös csúcsa az  $ABC$  háromszög súlypontja, összesen 4 olyan darabra esik szét, amelyek közül 2–2 nyilván egybevágó. (Lásd az ábrát!)

Ebből következik, hogy  $e$  mindkét oldalára még egy kisháromszögnyi terület kerül, így összesen már 4–4 kisháromszögnyi terület van mind a két oldalon. Így bármelyik rész területe legalább akkora, mint az  $ABC$  háromszög területének  $\frac{4}{9}$ -része. Mivel pedig  $e$  még egy kis háromszöget kettévág, mindkét rész területe nagyobb ennél.

Ezzel beláttuk, hogy a két terület aránya mindig  $\frac{4}{5}$  és  $\frac{5}{4}$  közé esik, és hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha  $e$  párhuzamos a háromszög egyik oldalával.