

Állítjuk, hogy az  $ab = cd$  feltételből következik, hogy léteznek olyan  $p, q, r, s$  pozitív egész számok, hogy  $a = pq$ ,  $b = rs$ ,  $c = pr$  és  $d = qs$ . Ebből már közvetlenül adódik a bizonyítandó állítás, nemcsak 1984, hanem tetszőleges  $k \geq 1$  egész kitevő esetén. Ekkor ugyanis

$$a^k + b^k + c^k + d^k = (pq)^k + (rs)^k + (pr)^k + (qs)^k = (p^k + s^k)(q^k + r^k),$$

és mivel a kapott szorzat mindkét tényezője legalább 2, a négytagú összeg valóban összetett szám.

A felhasznált állítás – az úgynevezett *négyszám-tétel* – a következőképpen igazolható. Jelölje  $a$  és  $c$  legnagyobb közös osztóját  $p$ . Ekkor relatív prím  $q$  és  $r$  természetes számokra  $a = pq$ ,  $c = pr$ . S mivel  $pqb = ab = cd = prd$ ,  $p$ -vel egyszerűsítve

$$(1) \qquad qb = rd$$

adódik. (1) jobb oldalán álló szorzat  $q$ -nak többszöröse, ugyanakkor  $r$ -nek és  $q$ -nak nincs közös prímosztója. Így  $q$  szükségképpen osztója a másik tényezőnek,  $d$ -nek, vagyis  $d/q = b/r$  egész szám. Ezt választva  $s$ -nek,  $b = rs$  és  $d = qs$ , amivel állításunk bizonyítását befejeztük.

*Megjegyzés.* A négyszám-tétel fenti bizonyításában felhasználtuk azt a számelmélet alaptételének nevezett állítást, mely szerint minden természetes szám egyértelműen bontható prímszámok szorzatára. A négyszám-tétel érdekessége, hogy adható rá olyan bizonyítás is, amelyik nem használja fel a számelmélet alaptételét.