

Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon α , β és γ -val, ahol $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. A szögek mértékszámai számtani sorozatot alkotnak és $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, tehát $\beta = 60^\circ$.

Legyen az A -ból a BC oldalra bocsátott merőleges talppontja T . Az ATB derékszögű háromszög B -nél levő szöge 60° -os, tehát

$$BT = \frac{c}{2}, \quad AT = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Így az ACT derékszögű háromszögből

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 = b^2,$$

vagyis $a^2 + c^2 - ac = b^2$, ahonnan ac -vel osztva és rendezve

$$(1) \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{ac} + 1 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right)^2.$$

Mivel $a \leq b \leq c$ és az oldalak reciprokai is számtani sorozatot alkotnak, azért

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right),$$

ahonnan $\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2$. Ezt (1)-be helyettesítve

$$(2) \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 2 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right)^2 \leq 2.$$

Egy pozitív szám és reciprokának összege azonban mindig legalább 2, és egyenlőség csak akkor áll, ha a szám éppen 1. Így (2) csak úgy teljesülhet, ha $\frac{a}{c} = 1$, azaz $a = c$. Ám ekkor $a \leq b \leq c$ miatt a háromszög mindhárom oldala egyenlő. A háromszög szabályos, a szögek mind 60° -osak, és a szögek, valamint az oldalak reciprokai is számtani sorozatot alkotnak.