

I. megoldás. Legyen az $AB = c$ átfogó felezőpontja F , a beírt kör sugara ϱ , érintési pontjai az AB -n D , AC -n E . Legyen AF az a szakasz, ami a feltétel szerint derékszög alatt látszik. Ekkor AOF derékszögű háromszögben a magasságtétel szerint (1. ábra).

$$(1) \quad DO^2 = AD \cdot DF = \varrho^2.$$

1984-11-391-1.eps

1. ábra

Tudjuk továbbá, hogy

$$\varrho = OE = CE = s - c = \frac{a + b - c}{2},$$

illetőleg

$$DA = s - a = \frac{b + c - a}{2},$$

és

$$DF = \frac{c}{2} - AD = \frac{a - b}{2}.$$

AD , DF és ϱ fenti kifejezéseit (1)-be helyettesítve

$$(2) \quad \left(\frac{b + c - a}{2} \right) \left(\frac{a - b}{2} \right) = \left(\frac{a + b - c}{2} \right)^2,$$

azaz $3ac + bc = 2a^2 + 2b^2 + c^2$. Ebből és az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggésből

$$b = 3c - 3a,$$

amit a $b^2 = c^2 - a^2$ -be visszahelyettesítve és rendezve

$$5 \left(\frac{a}{c} \right)^2 - 9 \left(\frac{a}{c} \right) + 4 = 0.$$

Az egyenletből $\frac{a}{c} = 1$ vagy $\frac{a}{c} = \frac{4}{5}$. Az első érték nyilván nem felel meg a feltételnek, hiszen $c > a$. Ha pedig $\frac{a}{c} = \frac{4}{5}$, akkor $\frac{b}{c} = \frac{3c - 3a}{c} = \frac{3}{5}$, azaz a derékszögű háromszög oldalainak aránya $3 : 4 : 5$. Ilyen értékekkel (2) teljesül, és így (1) is, ami azt jelenti, hogy ekkor az AF szakasz O -ból valóban derékszög alatt látszik.

II. megoldás. Legyen a háromszög AB átfogójának felezőpontja F és tegyük fel, hogy O közelebb van A -hoz, mint B -hez (2. ábra).

1984-11-391-2.eps

2. ábra

Az OA , OB , OC szakaszok a háromszög szögfelezői, tehát

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

mivel a háromszög C -nél derékszögű és így $\alpha + \beta = 90^\circ$. A feltétel szerint $\angle AOF = 90^\circ$, tehát $\angle BOF = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$. Nagyítsuk ki B -ből kétszeresére a BOF háromszöget, F ekkor A -ba, O pedig – mondjuk – P -be kerül. A nagyítás miatt

$$AP = 2 \cdot FO \quad \text{és} \quad \angle BPA = \angle OPA = \angle BOF = 45^\circ.$$

Az OAP háromszögben tehát P -nél 45° -os szög van, O -nál $180^\circ - \angle BOA = 45^\circ$. Ezért OPA egyenlő szárú: $AO = AP$, tehát

$$AO : OF = AP : OF = 2 : 1.$$

Legyenek a beírt kör érintési pontjai az AB , BC , CA oldalakon rendre R , S és T . Az AOF és ARO derékszögű háromszögek hasonlóak, hiszen A -ban közös szögük van, ezért $AR : RO = AO : OF = 2 : 1$, következésképp

$$AR = AT = 2OR = 2\rho,$$

ahol ρ jelöli a beírt kör sugarát. Az $OSCT$ négyszög S -nél, C -nél, T -nél levő szöge derékszög, $OS = OT = \rho$, ezért ez a négyszög négyzet is, tehát

$$CS = CT = \rho.$$

Végül a még ismeretlen $BR = BS = x$ szakaszt a Pitagorasz-tételből számítjuk ki:

$$(AR + x)^2 = (CS + x)^2 + CA^2,$$

azaz

$$(2\rho + x)^2 = (\rho + x)^2 + 9\rho^2,$$

ahonnan $x = 3\rho$. Innen a háromszög oldalainak aránya

$$AB : BC : CA = (AR + RB) : (BS + SC) : (CT + TA) = 5\rho : 4\rho : 3\rho,$$

egyezésben az előző megoldás során kapott értékekkel.