

Világos, hogy mind az AOB , mind az ADB háromszög szabályos. Így ha a C pont egybeesik A -val vagy B -vel, akkor a $CA^2 + CB^2 = CD^2$ összefüggés teljesül. Feltehetjük tehát, hogy C a körnek A -tól és B -től különböző pontja.

1984-11-389-1.eps

1. ábra

Válasszuk meg a betűzést úgy, hogy az AOB (irányított) szög $+60^\circ$ -os legyen (1. ábra), majd forgassuk el az ACD háromszöget az A pont körül $+60^\circ$ -kal. Ez a forgatás a D pontot B -be, a C -t pedig valamilyen E pontba viszi. A forgatás miatt az ACD háromszög egybevágó az AEB háromszöggel, tehát $CD = EB$ és $CA = EA$, továbbá $\angle CAE = +60^\circ$, ezért a CAE háromszög szabályos: $CA = CE$ és $\angle ECA = +60^\circ$.

A $CA = CE$ és $CD = EB$ alapján a kérdéses $CA^2 + CB^2 = CD^2$ összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha

$$CE^2 + CB^2 = EB^2.$$

Itt a BCE háromszög oldalai állnak, tehát a feladat megoldásához a Pitagorasz-tétel alapján elegendő azt belátni, hogy a BCE háromszög C csúcsában derékszög van. A továbbiakban ezt bizonyítjuk.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a C pont a kör hosszabb vagy rövidebb AB ívére esik. Az első esetben (1. ábra) az AB ívhez tartozó ACB kerületi szög fele az $\angle AOB = 60^\circ$ középponti szögnek, tehát $\angle ECB = \angle ECA + \angle ACB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, ahogyan kívántuk.

1984-11-389-2.eps

2. ábra

A másik esetben (2. ábra) viszont az ACB kiegészítő szöge a középponti szög felének, vagyis $\angle ACB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, és $\angle ECB = \angle ACB - \angle ACE = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

A BCE háromszög tehát valóban derékszögű, amivel a feladat állítását is beláttuk.