

Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon α , β , γ -val, az A -ból induló f_a szögfelező és a BC oldal metszéspontját M -mel. (M nyilván belső pontja a BC oldalnak.) Írjuk fel a BAC , BAM , MAC háromszögek területét két oldaluk és a közbezárt szögnek a felhasználásával:

$$\frac{bc \sin \alpha}{2} = T_{BAC} = T_{BAM} + T_{MAC} = \frac{bf_a \sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{cf_a \sin \frac{\alpha}{2}}{2}.$$

A $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ helyettesítéssel rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{f_a} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Mivel α egy háromszög szöge, $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, és ezért $0 < \cos \frac{\alpha}{2} < 1$, amiből

$$\frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{f_a} < \frac{1}{f_a}.$$

1985-02-064-1.eps

Hasonlóan adódik, hogy

$$\frac{1}{2c} + \frac{1}{2a} < \frac{1}{f_b}, \quad \text{és} \quad \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} < \frac{1}{f_c}.$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} + \frac{1}{f_c},$$

az állítás tehát valóban igaz.

Megjegyzés. Az is igazolható, hogy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} + \frac{1}{f_c} \right),$$

és egyenlőség csak a szabályos háromszögnél lép fel.