I. megoldás. Megmutatjuk, hogy m-nek a legkisebb, $\sqrt{a}$-nál nagyobb egész megfelel, azaz

$$a < \left(\left[\sqrt{a}\right]+1\right)^2 < d.$$

Az első egyenlőtlenség nyilvánvaló, hiszen egy $\sqrt{a}$-nál nagyobb szám négyzete nagyobb, mint a, és $\sqrt{a} < \left[\sqrt{a}\right]+1$. Másfelől

$$m = \left[\sqrt{a}\right]+1 \le \sqrt{a}+1, \qquad \text{ahonnan}$$
$$m^2 \le \left(\sqrt{a}+1\right)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1.$$

Elegendő igazolni, hogy

(1) $$a + 2\sqrt{a} + 1 < d.$$

Legyen $b = a + x$, $c = a + y$, $d = a + z$, itt x, y, z pozitív egészek és $0 < x < y < z$. Ekkor a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

(2) $$2\sqrt{a} + 1 < z.$$

A feltétel szerint $a(a+z) = (a+x)\,(a+y)$, ahonnan

(3) $$\big(z-(x+y)\big)a = xy.$$

A bal oldalon a együtthatója egész, és mivel a jobb oldal pozitív, így legalább 1. Így egyrészt

(4) $$z - 1 \ge x + y,$$

másrészt

(5) $$xy > a.$$

(4)-ből $\dfrac{z-1}{2} \ge \dfrac{x+y}{2}$; (5)-ből pedig $\sqrt{xy} \ge \sqrt{a}$. De x és y különböző egészek, így számtani közepük határozottan nagyobb mértani közepüknél. Igaz tehát, hogy

$$\frac{z-1}{2} \ge \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \ge \sqrt{a},$$

vagyis $\dfrac{z-1}{2} > \sqrt{a}$, ahonnan rendezés után (2) adódik. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Induljunk ki az $ad = bc$ összefüggésből. Az ad-t prímszámok szorzataként felírva ezeket a prímeket ketté tudjuk osztani úgy is, hogy az egy-egy csoportba esők szorzata a, illetve d legyen, és úgy is, hogy a szorzatok értéke b, valamint c legyen. Ám akkor ezek a prímek négy csoportba oszthatók, mondjuk P-be, Q-ba, E-be és S-be, úgy hogy a P és Q-beli prímek szorzata a, az R és S-belieké d; a P-be és R-be eső prímek szorzata a b-t adja ki, a Q-ba és S-be esők szorzata pedig c -t. Az egy csoportba eső prímek szorzatát a megfelelő kisbetűvel jelölve azt kapjuk, hogy vannak olyan pozitív egész p, q, r, s számok, amelyekre

$$a = pq, \quad b = pr, \quad c = qs, \quad d = rs.$$

Az $a < b < c < d$ alapján $pq < pr < qs < rs$, azaz

(6) $$q < r \quad \text{és} \quad p < s.$$

Akkor van olyan m egész, amire $a < m^2 < d$, ha $\sqrt{a}$ és $\sqrt{d}$ közé esik egész szám, és ez biztosan így van, ha kettejük különbsége nagyobb 1-nél:

(7) $$\sqrt{d} - \sqrt{a} = \frac{d-a}{\sqrt{d}+\sqrt{a}} > 1.$$

Elegendő tehát ezt bizonyítanunk. (6) szerint $r-q-1$, valamint $s-p-1$ nem negatívak, azért

$$(r+q)(s-p-1) + (p+s)(r-q-1) \ge 0,$$

ahonnan

$$rs - pq \ge \frac{p+q+r+s}{2}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a jobb oldalra alkalmazva

$$rs - pq \ge \sqrt{pq} + \sqrt{rs}$$

adódik. Ez pedig a bizonyítandó (7) egyenlőtlenséggel egyezik meg, ha megmutatjuk, hogy az egyenlőség nem állhat fenn. Ha ugyanis a két oldal mégis egyenlő volna, akkor szükségképpen $p = q$ és $r = s$, hiszen a számtani és mértani közepük egyenlő és ekkor $b = pr = qs = c$, ellentétben a $b < c$ feltétellel.