

A kocka éleinek felező merőleges síkjai (összesen 3 db egymásra páronként merőleges sík) a kocka köré írt gömb felszínét 8 egybevágó gömbháromszögre bontják. Ezen gömbháromszögek oldalai egyenlők, mert minden oldal hossza megegyezik egy gömbi főkör negyedével. Könnyen látható, hogy a kocka csúcsai éppen ezeknek a gömbháromszögeknek a középpontjai, vagyis az egyes gömbháromszögek csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjával összekötő főkörök metszéspontjai. Az, hogy e három főkör gömbháromszögeinkben egy ponton megy át, abból következik, hogy közülük bármely kettőnek a metszéspontja a gömbháromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van.

Ezek alapján feladatunk az, hogy a gömbön kijelöljünk 3 egymásra páronként merőleges főkört, amelyek meghatározzák a 8 egybevágó gömbháromszöget, majd megszerkesszük a gömbháromszögek középpontjait. Ezek a középpontok egy kocka csúcsai lesznek, mert a gömbháromszögek egybevágósága miatt az egy félgömbön levő 4 gömbháromszög a félgömb tengelye körüli 90° -os forgatásokkal egymásba vihető, tehát középpontjaik egy négyzet csúcsait alkotják. Mivel ez bármely egy félgömbön levő négyesre igaz, ezért a 8 középpont egy olyan hatlapú konvex test 8 csúcsa, amelynek minden lapja négyzet. Ilyen test pedig csak egy van, a kocka.

A szerkesztés menete ezek után a következő. Megrajzolunk egy tetszőleges k_1 főkört, és a 0° , 90° , 180° , ill. a 270° -os beosztások mentén kijelöljük az A , B és a velük átellenes A^* , B^* pontokat. Az AA^* és a BB^* így a gömb merőleges átmérői. A B és a B^* pontokon át fölveszünk egy, az előzőtől különböző k'_1 főkört, és e mentén addig forgatjuk a sapkát, amíg a 0° -os beosztás a B pontba esik. A 180° -os beosztás ekkor a B^* pontban van, a 90° és a 270° -os beosztások pedig egyenlő távolságra vannak az átellenes B és B^* pontoktól (1. ábra). Az ezekben fölvet C , ill. C^* pontok tehát rajta vannak az A -n és A^* -on áthaladó, BB^* -ra merőleges k_2 főkörön, amelynek S_2 síkja így merőleges a k_1 főkör S_1 síkjára.

1987-11-384-1.eps

1. ábra

1987-11-384-2.eps

2. ábra

Illesszük most a k_2 főkörre a sapkát úgy, hogy a 0° -os beosztás az A pontban legyen (ekkor persze a 180° -os osztásvonal A^* -ra esik). A 90° és a 270° -os beosztásokban kijelölt D és D^* pontok benne vannak az AA^* átmérő felező merőleges síkjában. A B , D , B^* , D^* pontok tehát egy k_3 főkörön vannak (2. ábra), amelynek S_3 síkja bármely, az AA^* átmérőn átmenő síkra, így az S_1 -re és az S_2 -re is merőleges.

Végül a nyolc egybevágó gömbháromszög oldalait a fokbeosztás segítségével megfelezzük, majd a felezőpontokat a szemközti csúcscsal összekötve – azaz megrajzolva a szóban forgó pontokon átmenő főkört – megkapjuk a gömbháromszögek középpontjait, amelyek a fentiek szerint valóban egy kocka csúcsai.

Megjegyzések. 1. A 8 darab gömbháromszög középpontjának szerkesztéséhez elegendő 4 főkört megrajzolnunk, mert például a 2. ábrán látható ABD , ABD^* , A^*B^*D és $A^*B^*D^*$ gömbháromszögek AB , illetve A^*B^* oldalát felező főkörök egybeesnek.

2. A sapka peremén adott beosztásból kizárólag a 0° , 45° , 90° , 180° és a 270° -os osztópontokra volt szükségünk (a 45° -os beosztást a gömbháromszögek oldalának megfelelésekor kell használnunk).