Jelöljük a nagyítás után kapott háromszög csúcsait rendre K, L, M-mel, ahol K a P-vel szemközti csúcs. Tudjuk, hogy az ABC háromszög az RQP háromszög S súlypontjából $-\dfrac{1}{2}$ arányú kicsinyítéssel jött létre, azaz e két háromszög súlypontja megegyezik. Jelölje a PB súlyvonal és AC oldal metszéspontját P_1, ekkor $PP_1=\dfrac{1}{2}PB$, $PS=\dfrac{2}{3}PB$, ahonnan $PS=4P_1S$. Az LM szakasz metszi a PP_1 szakaszt, és így a PQR háromszög PA, PC oldalszakaszait is. Ez pedig azt jelenti, hogy a $D_1D_2E_1E_2F_1F_2$ valódi (konvex) hatszög. Ha viszont $k\le 1$, akkor a KLM képháromszög kisebb, mint az eredeti ABC háromszög; ha pedig $k\ge 4$, akkor a képháromszög tartalmazza a PQR háromszöget, a megfelelő oldalak nem metszik egymást, nem jön létre hatszög.

1985-01-019-1.eps

1. ábra

Legyen tehát $1<k<4$, és jelöljük a PP_1 és D_1F_2 szakaszok metszéspontját P_2-vel. Az ABC és MKL háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{P_2S}{P_1S}=k,$$

és így

$$\frac{PP_2}{P_1S}=\frac{PS-P_2S}{P_1S}=\frac{PS}{P_1S}-\frac{P_2S}{P_1S}=4-k.$$

A PD_1F_2, F_1E_2R, D_2QE_1 háromszögek mindegyike hasonló a PQR háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $PB=3\cdot BS=3\cdot(2\cdot P_1S)$ alapján

(1) $$\lambda=\frac{PP_2}{PB}=\frac{PP_2}{6P_1S}=\frac{4-k}{6},$$

mindhárom esetben. A kis háromszögek tehát egybevágóak, területük a PQR háromszög területének λ^2-szerese.

Jelöljük a PQR háromszög területét T-vel. A hatszög területét úgy kaphatjuk meg, hogy T-ből kivonjuk a 3 kis háromszög területének összegét. Ennek kell kétszer akkorának lennie, mint az ABC háromszög területe. Ám az ABC háromszög területe $T/4$, ezért a következő összefüggésnek kell fennállnia: $T-3\lambda^2T=T/2$, azaz $\lambda^2=1/6$. A λ helyébe az (1) szerinti $(4-k)/6$-ot helyettesítve $(4-k)^2=6$, amit az $1<k<4$ feltétel mellett csak a $k=4-\sqrt{6}$ érték elégít ki.

Így k értéke csak $4-\sqrt{6}$ lehet. Ha k-t ennyinek választjuk, (1) alapján az egybevágó PD_1F_2, F_1E_2R, D_2QE_1 háromszögek a PQR háromszögből $\lambda=$
$=\sqrt{6}/6$ arányú kicsinyítéssel jönnek létre, tehát a hatszög területe

$$T-3\lambda^2T=T-\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}T,$$

valóban megegyezik az ABC háromszög területének kétszeresével.

Megjegyzések. 1. A feltételként kapott $(4-k)^2=6$ egyenletet a $k=4-\sqrt{6}$ értéken kívül a $k=4+\sqrt{6}$ is kielégíti. Mi lehet ennek a második megoldásnak a geometriai jelentése? Az ABC háromszöget $(4+\sqrt{6})$-szorosára kinagyítva, a kapott MKL háromszög oldalai nem metszik a PQR háromszög *oldalszakaszait,* hanem csak *oldalegyeneseit.* A keletkezett $D_1D_2E_1E_2F_1F_2$ idom „hurkolt” hatszög. Ha ennek „területét” úgy definiáljuk, hogy a PQR háromszög területéből *levonjuk* a vonalkázott „hurkok” területét, akkor erre a hatszögre is teljesül, hogy „területe” kétszerese az ABC háromszög területének (2. ábra).

1985-01-019-2.eps

2. ábra

2. A maximális pontszámot azok kapták meg, akik azt is indokolták, hogy a $(4-k)^2=6$ egyenlet megoldásaként adódó $k=4-\sqrt{6}$ miért megoldása a feladatnak is (és nemcsak ennek az egyenletnek), illetve hogy a másik, $k=4+\sqrt{6}$ miért nem megoldás.