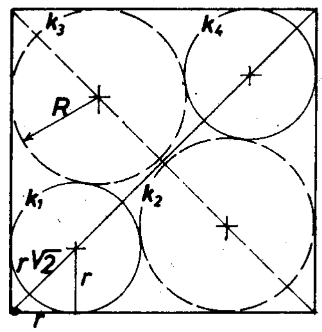
Legyen a négyzet oldala egységnyi, az egyik kör k_1, és érintse ez k_2-t és k_3-at. Ekkor k_2 érinti k_1-et, és k_3 és k_4 közül még egyet. Ez nem lehet k_3, mivel ekkor k_1, k_2 és k_3 páronként érintenék egymást, és k_4 bármelyiket is érintené k_1, k_2, k_3 közül, az a többi körök közül hármat (és nem kettőt) érintene. Így k_2 csak k_1-et és k_4-et érintheti. Hasonlóan látható, hogy k_4 a k_2-n kívül csak k_3-at érintheti, s k_3 csak k_1-et és k_4-et. A feltétel szerint az érintő körök sugarai egyenlők, azért k_1 és k_4 sugara egyenlő – mondjuk r, továbbá k_2 és k_3 sugara is egyenlő – R.

Semelyik kör nem érintheti a négyzet szemben fekvő oldalait, hiszen a négyzetbe még egy ugyanakkora sugarú körnek el kell férnie. Így a körök két-két szomszédos oldalt érintenek, középpontjaik a négyzet átlóin helyezkednek el. Az is világos, hogy egyik sem érintheti belülről a másikat, tehát a négy kör a négyzet négy sarkában „ül”.

Tegyük fel először, hogy az r sugarú k_1 és k_4 a négyzet szomszédos sarkaiban van. Mivel k_1 és k_4 nem metszheti egymást, sőt nem is érintheti, r kisebb, mint a négyzet oldalának negyede, azaz $1/4$. Hasonlóan k_2 és k_3 sugara is kisebb $1/4$-nél, ekkor viszont k_1 és k_2 nem érinthetné egymást.



1. ábra

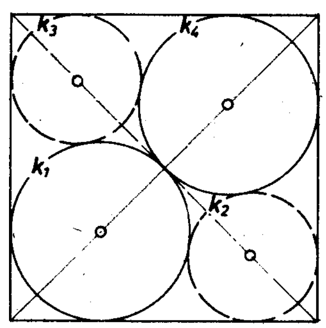
Ezért k_1 és k_4, valamint k_2 és k_3 is a négyzet átellenes sarkaiban van (1. ábra). k_1 sugara legfeljebb akkora lehet, hogy k_1 és k_4 metszés- és érintéspont nélkül elférjenek, vagyis hogy a k_1 által az átlóból kivágott szakasz az átló felénél rövidebb legyen:

$$r\sqrt{2} + r < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

azaz

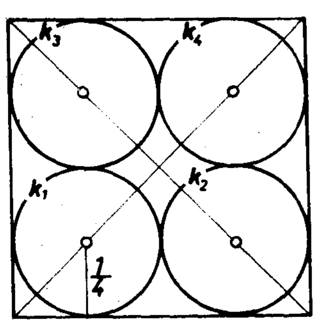
$$r < \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2929.$$

Ha r-et éppen $(1 - \sqrt{2}/2)$-nek választjuk, k_1 és k_4 éppen érinti egymást a négyzet középpontjában. Ezekhez találhatók megfelelő k_2 és k_3 körök (2. ábra).

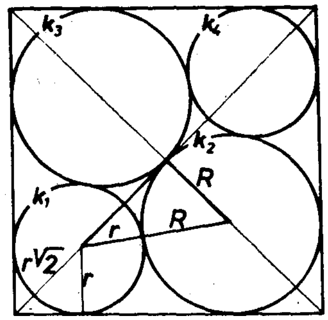


2. ábra

Ha most k_1 (és k_4) sugarát folyamatosan csökkentjük, a hozzájuk tartozó k_2, k_3 körök sugara folyamatosan nő. $r = 1/4$ esetben mind a négy kör sugara egyenlő (3. ábra), r-et tovább csökkentve k_2 és k_3 növekszik, s r-et addig tudjuk csökkenteni, míg k_2 és k_3 „össze nem ér” a négyzet középpontjában (4. ábra).



3. ábra



4. ábra

Ebben a helyzetben k_2 és k_3 sugara az előbb kiszámított $R = 1 - \sqrt{2}/2$, s a vastagon kihúzott derékszögű háromszögből

$$(r+R)^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2}\right)^2,$$

azaz

$$r^2 - 2r(1+R) + \frac{1}{2} = 0.$$

Innen figyelembe véve, hogy $r < 1$, kapjuk, hogy

$$r = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} = 0,2105.$$

A k_1 kör sugara csak ennél nagyobb, és $(1 - \sqrt{2}/2)$-nél kisebb lehet, ám ezek között tetszőleges értéket felvehet. A k_2 és k_3 körökre nyilván ugyanez a helyzet. Így a feladat kérdésére a válasz: a kérdéses körök sugarai az

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right)$$

nyílt intervallum valamelyik elemével, és csak ezekkel lehetnek egyenlők.