

Jelölje a számokat az óramutató járásával megegyező sorrendben $a_1, a_2, \dots, a_{50}$ (tehát a_1 és a_{50} is szomszédosak).

1984-11-384-1.eps

A három kiválasztott szám helyét – amelyek szorzatát megkérdezzük – egyértelműen meghatározza a középső. Ha ez a középső szám a_i , jelöljük a szorzatot b_i -vel. Az is látszik, hogy legfeljebb 50 különböző kérdést tudunk feltenni, hiszen ennél több szám nem állhat közepen. Azt állítjuk, hogy az 50 szám szorzatát ebből az 50 kérdésből meg tudjuk állapítani. Valóban,

$$\begin{aligned} b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{50} &= \\ &= (a_{50} \cdot a_1 \cdot a_2)(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot \dots \cdot (a_{49} \cdot a_{50} \cdot a_1) = \\ &= (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{50})^3. \end{aligned}$$

Mivel egy valós szám köbe egyértelműen meghatározza magát a számot, innen $a_1 \cdot a_2 \cdot a_{50}$ értéke is meghatározható.

Másfelől azt állítjuk, hogy a szorzatot nem tudjuk meghatározni 49 vagy annál kevesebb kérdésből. Pontosabban a következő – erősebb – állítást igazoljuk: ha az első 49 kérdésre (akármilyen volt az) a válasz az, hogy a kérdéses 3 szám szorzata $+1$, akkor még mindig elképzelhető, hogy az 50 szám szorzata $+1$, és az is, hogy az 50 szám szorzata -1 .

A 49 kérdés a $b_1, b_2, \dots, b_{49}$ számok közül legfeljebb 49 értékére kérdezhetett rá, így van olyan, amiről a kérdező nem tudja, hogy az $+1$ vagy pedig -1 . Feltehetjük, hogy ez éppen a b_{50} . Így az előbb megfogalmazott állítás igazolásához elegendő egy kör kerületére *kétféleképpen* felírunk 50 darab $(+1)$ -et vagy (-1) -et úgy, hogy

- (1) az egyik esetben a felírt számok szorzata $+1$, a másikban -1 legyen;
- (2) mindkét esetben a $b_1, b_2, \dots, b_{49}$ szorzatok értéke (a $b_{50} = a_{49} \cdot a_{50} \cdot a_1$ kivételével) $+1$ legyen.

Az egyik felírásban a kör kerületére 50 darab $+1$ kerül; a másikat a mellékelt ábra mutatja: $a_i = +1$ ha i 3-mal osztva 1 maradékot ad, és $a_i = -1$ egyébként.

Az első esetben a felírt számok szorzata $+1$; a másodikban $1 + 48/3 = 17$ darab $+1$ és $50 - 17 = 33$ darab (-1) szorzatát kell vennünk, ami -1 . Az első esetben $b_1, b_2, \dots, b_{49}$ nyilvánvalóan $+1$, míg a másodikban b_{49} kivételével a három tényező közül kettő -1 , egy pedig $+1$, vagyis ekkor is $b_1 = b_2 = \dots = b_{49} = +1$.

A szorzat kitalálásához tehát legalább 50 kérdést fel kell tenni.

Megjegyzés. 50 kérdésből már többre is lehet következtetni, nevezetesen minden számról meg lehet mondani, hogy az $+1$ vagy pedig -1 . Valóban, ismert $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, a_4 \cdot a_5 \cdot a_6, \dots, a_{46} \cdot a_{47} \cdot a_{48}$, vagyis ezek szorzata is. Ismert $a_1 \cdot \dots \cdot a_{50}$ is, tehát ezek hányadosa, vagyis $a_{49} \cdot a_{50}$ is meghatározható. De $a_{49} \cdot a_{50} \cdot a_1$ ismeretében ebből a_1 -et, és hasonlóan az összes számot megkapjuk.