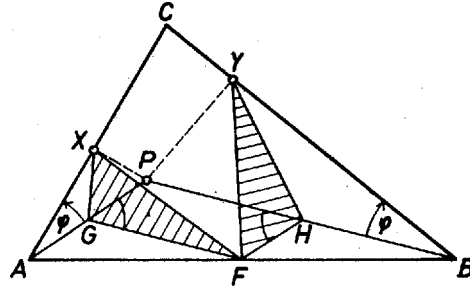


Jelöljük az  $AB$  szakasz felezőpontját  $F$ -fel, az  $AP$  és  $BP$  felezőpontját pedig  $G$ -vel,  $H$ -val. Az  $FGH$  háromszög a  $PBA$  középháromszöge, ezért  $GFHP$  paralelogramma – speciálisan  $PH = GP$ ,  $GP = HF$  és  $\angle PHF = \angle PGF$ .



A  $P$  belső pontja az  $ABC$  háromszögnek, ezért a  $\angle PAC = \angle PBC = \varphi$  szög kisebb a háromszög  $A$ -nál és  $B$ -nél levő szögeinél, tehát  $\varphi$  mindenképpen hegyesszög.  $P$ -t az  $AC$ ,  $BC$  egyenesekre vetítve az  $X$ ,  $Y$  talppontok tehát az  $AC$ , illetve  $BC$  felegyenesekre esnek. Így az  $APX$ ,  $BPY$  hasonló derékszögű háromszögek ellentétes körüljárásúak, és körülírt köreik középpontja  $G$ , illetve  $H$ .

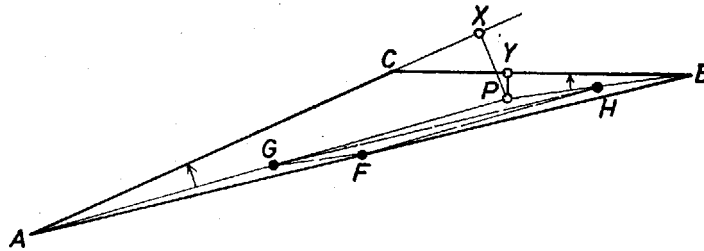
Nézzük most az  $XGF$ , illetve  $YHF$  háromszögeket. Először is  $GX = GP$ , hiszen  $G$  az  $APX$  körülírt körének középpontja, és így előbbi megállapításunk szerint  $GX = GP = HF$ . Hasonlóan adódik, hogy  $HY = HP = GF$ , vagyis  $XGF$  és  $YHF$  két-két oldalban megegyezik. Megmutatjuk, hogy a közbezárt  $\angle XGF$  és  $\angle YHF$  szögek is egyenlők. Az  $\angle XGP$  az  $APX$  háromszög köré írt körben az  $XP$  húrhoz tartozó középponti szög, így kétszerese az ugyanehhez a húrhoz tartozó  $\angle XAP$  kerületi szögnek. Így

$$\angle XGF = \angle XGP + \angle PGF = 2 \cdot \angle XAP + \angle PGF = 2 \cdot \angle YBP + \angle PHF,$$

hiszen a feltétel szerint  $\angle XAP = \angle YBP$ , és láttuk, hogy  $GFHP$  paralelogramma. Hasonlóan  $H$  a  $BPY$  derékszögű háromszög körülírt körének középpontja, így

$$2 \cdot \angle YBP + \angle PHF = \angle YHP + \angle PHF = \angle YHF,$$

tehát  $\angle XGF = \angle YHF$ , ahogyan állítottuk. Ezért az  $XGF$  és  $YHF$  háromszögek egybevágók,  $G$ -vel,  $H$ -val szemközti oldaluk egyenlő:  $FX = FY$ .



Az  $F$  pont tehát egyenlő távolságra van  $X$ -től és  $Y$ -től, így rajta van az  $XY$  szakasz felező merőlegesén.

Összefoglalva, az  $AB$  szakasz  $F$  felezőpontja a  $P$  minden megengedett helyzetében rajta van az  $XY$  felező merőlegesén, ezért a merőlegesek valóban egy ponton mennek át.