

Az A csúcsból induló szögfelezőnek a szemközti oldallal és körülírt körrel való metszéspontját jelölje rendre E és F , a szögfelezők metszéspontját, amely egyben a beírt kör középpontja is, pedig O (1. ábra).

1984-04-169-1.eps

1. ábra

A kerületi szögek tételéből $\angle CBF = \angle CAF = \angle BAF = \angle BCF = \frac{\alpha}{2}$. A $\angle BOF$ külső szöge az ABO háromszögnek, és így

$$\angle BOF = \angle OBA + \angle BAO = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \angle OBF.$$

Hasonlóan

$$\angle COF = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \angle OCF,$$

vagyis OFB és $OF C$ egyenlő szárú háromszögek, $BF = OF = CF$.

Az AFC és CFE háromszögekben $\angle FCE = \angle CAF = \frac{\alpha}{2}$, és $\angle EFC$ közös, így e két háromszög hasonló. Megfelelő oldalaikra $AF : FC = FC : FE$, ahonnan $FC = \sqrt{AF \cdot FE}$.

1984-04-169-2.eps

2. ábra

Ilyen módon tehát az FC szakasz szerkeszthető. Az AF szakasz E pontjában állított merőleges egyenesnek az AF Thalész-körével alkotott C' metszéspontjára $FC' = \sqrt{AF \cdot FE}$ (2. ábra). Az F középpontú, C' -n áthaladó kör kimetszi az AF szakaszból a beírt kör O középpontját. A beírt kört ezek után adott pontjának ismeretében meg tudjuk rajzolni. A -ból és E -ből a beírt körhöz érintőket húzva megkapjuk a keresett háromszög oldalait.

A szerkeszthetőség feltétele, hogy az A pont a beírt körön kívül legyen, E pedig ne essen a kör belsejébe, továbbá $OE < OA$ teljesüljön. Ez utóbbi feltétel $OE = C'F - FE$, és $OA = AF - C'F$ miatt egyenértékű azzal, hogy $2C'F < AF + EF$, ami a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján mindig teljesül.

A másik két feltétel adatainkkal felírva:

$$OP < AF - \sqrt{AF \cdot FE}, \quad \text{ill.} \quad OP \leq \sqrt{AF \cdot FE} - FE.$$

Ez utóbbiban ha egyenlőség áll fenn, a szerkesztés eredményeként egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha egyenlőtlenség, akkor két, az AF -re tükrös háromszöget.