

Tegyük fel, hogy k_1 a nagyobbik kör, ekkor a közös érintők és a körök középpontját összekötő egyenes (a centrális) P metszéspontja a centrálison O_1 -nek ugyanarra az oldalára esik, mint O_2 (l. ábra). A P_1 és P_2 érintési pontok M_1 , M_2 vetülete ugyancsak az O_1P szakaszra esik. M_1 vagy elválasztja O_1 -et és O_2 -t, és akkor a pontok sorrendje O_1 , M_1 , O_2 , M_2 , P vagy nem, és akkor a sorrend O_1 , O_2 , M_1 , M_2 , P .

1984-04-168-1.eps

1984-04-168-2.eps

A két kör metszéspontjának, A -nak a vetülete mindkét esetben az M_1 és M_2 közé esik. A bizonyítandó szögegyenlőség helyett az $O_1AM_1\angle = O_2AM_2\angle$ egyenlőséget fogjuk igazolni. Ez ekvivalens az eredeti egyenlőséggel, melyet az első esetben úgy kapunk, hogy az egyenlőség mindkét oldalából levonjuk a közös $O_2AM_1\angle$ -t, a második esetben viszont a közös O_2AM_1 szöget az egyenlőség mindkét oldalához hozzá kell adni.

Nagyítsuk ki a k_2 kört P -ből mint középpontból úgy, hogy k_2 -nek k'_2 -vel jelölt képe k_1 legyen. Ekkor O_2 az O_1 -gyel, M'_2 az M_1 -gyel, P'_2 a P_1 -gyel lesz azonos, az A pont képe A' , PA -nak k_1 -gyel való második metszéspontja. A nagyítás szögtartó, ezért $O_2AM_2\angle = O_1A'M_1\angle$. Az O_1P_1P derékszögű háromszögben P_1M_1 magasság, a befogótételt alkalmazva

$$PP_1^2 = PM_1 \cdot PO_1.$$

A P -ből mint külső pontból a körhöz húzott érintő és szelő szakaszra ismert mértani közép tétel szerint

$$PP_1^2 = PA \cdot PA'.$$

Amiből $PM_1 \cdot PO_1 = PA \cdot PA'$ adódik, ami azt jelenti, hogy M_1 , O_1 és A , A' egy körön vannak, mégpedig vagy az M_1O_1AA' vagy pedig az $M_1O_1A'A$ sorrendben. Az O_1M_1 húrhoz tartozó kerületi szögekre $O_1A'M_1\angle = O_1AM_1\angle$, és ezt akartuk igazolni.