

I. megoldás. Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ -val. A pontok a körülírt körön $AC_1BA_1CB_1A$ sorrendben helyezkednek el, így a B_1C_1 és az AA_1 húrok metszik egymást, jelöljük a metszéspontot M -mel. Azt kell megmutatnunk, hogy az AMC_1 háromszög derékszögű, vagyis hogy

$$(1) \quad MC_1A \sphericalangle + C_1AM \sphericalangle = 90^\circ.$$

1984-02-072-1.eps

A kerületi szögekre vonatkozó tételek alapján

$$\begin{aligned} MC_1A \sphericalangle &= B_1C_1A \sphericalangle = B_1BA \sphericalangle = \beta/2, \\ C_1AM \sphericalangle &= C_1AA_1 \sphericalangle = C_1AB \sphericalangle + BAA_1 \sphericalangle = C_1CB \sphericalangle + BAA_1 \sphericalangle = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Innen (1) azonnal adódik, a feladat állítását tehát beláttuk.

II. megoldás. Legyen O a háromszögbe írt kör középpontja. A kerületi szögekre vonatkozó tételt felhasználva

$$OC_1A \sphericalangle = CC_1A \sphericalangle = CBA \sphericalangle = \beta,$$

valamint

$$OAC_1 \sphericalangle = A_1AC_1 \sphericalangle = A_1AB \sphericalangle + BAC_1 \sphericalangle = A_1AB \sphericalangle + BCC_1 \sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Az AOC_1 háromszögben két szöget ismerünk, a harmadikat ki tudjuk számítani:

$$AOC_1 \sphericalangle = 180^\circ - OAC_1 \sphericalangle - OC_1A \sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) - \beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = OAC_1 \sphericalangle,$$

hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Az AOC_1 tehát egyenlő szárú háromszög, $C_1A = C_1O$, és így C_1 rajta van az AO szakasz felező merőlegesén.

Hasonlóan látható, hogy AOB_1 is egyenlő szárú háromszög, tehát B_1 is rajta van AO felező merőlegesén – így B_1C_1 valóban merőleges AA_1 -re, amit bizonyítani akartunk.